

Bachelorarbeit

Fire Sale Spiele mit Prioritäten

Maximilian Althaus

09. September 2022

eingereicht bei
Prof. Dr. Martin Hoefer
Institut für Informatik

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Erstellung dieser Bachelorarbeit auf unterschiedliche Art und Weise unterstützt haben.

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Prof. Dr. Martin Hoefler und Frau Lisa Wilhelmi, die diese Arbeit betreut haben. Sie standen mir von der Einarbeitung bis zur Abgabe zur Seite und haben mir durch hilfreiche Denkanstöße bei der Bewältigung vieler Probleme geholfen. Dafür möchte ich mich herzlich bedanken.

Des Weiteren bedanke ich mich bei meinen Kommilitonen, sowie meinen Mitbewohnern Henri Wagner und Luca Neupert, die mir besonders in den Räumlichkeiten des Lernzentrums, immer wieder Motivation und hilfreiche Anregungen gegeben haben.

Ein besonderer Dank gilt auch dem Blechbläserquintett VolcanicBrass und Albert Wanner, die in Zeiten des tiefen Nachdenkens für die nötige Ablenkung gesorgt und somit einen neuen distanzierten Blick auf einige Probleme ermöglicht haben.

Abschließend richte ich auch ein herzliches Dankeschön an meine Eltern und Großeltern, die mir durch Unterstützung in allen Bereichen das Studium ermöglicht haben.

Erklärung gemäß Bachelor-Ordnung Informatik 2019 § 35 Abs. 16

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen Quellen oder Hilfsmittel, als die in dieser Arbeit angegebenen, verwendet habe. Ferner bestätige ich, dass ich die vorliegende Arbeit nicht für eine andere Prüfung oder Studienleistung verwendet habe.

Frankfurt am Main, den 08. September 2022

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized 'M' followed by a period and a cursive 'Althaus'.

Maximilian Althaus

Abstract

In den letzten 20 Jahren hat der Anteil an automatisierten Tradern in unseren Märkten enorm zugenommen, sodass bereits 2008 mehr als 50% des Handelsvolumens der 30 DAX-Unternehmen an der Deutschen Börse von automatisierten Tradern getätigt wurde.¹ Ein bekanntes Phänomen in Märkten mit automatisierten Tradern sind *fire sales*, wobei ein einzelner Verkauf eine Kettenreaktion an Verkäufen auslösen und somit zu großen Preisverfällen führen kann. Wir betrachten die *fire sales* durch einen Ansatz der algorithmischen Spieltheorie und untersuchen die Struktur der Gleichgewichte. Dabei betrachten wir verschiedene Art und Weisen wie die Marktwerte (Assets) verkauft werden und zeigen für eine große Anzahl an Parametern, dass Gleichgewichte existieren und ein vollständiges Gitter formen. Wir zeigen auch, dass es Fälle gibt, in denen kein Gleichgewicht existiert, oder nur solche, die nicht gut für die Gemeinschaft sind. Dabei analysieren wir die jeweils besten Antworten der Agenten und ziehen mit Hilfe dieser Schlüsse über die benötigte Rechenzeit, bis sich Gleichgewichte bilden können.

¹Information aus [Hendershott and Riordan, 2009]

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Einleitung	1
1.2	Zielsetzung und Aufbau	2
2	Literaturübersicht	3
3	Verkäufe mit fester Gruppenreihenfolge	5
3.1	Das Modell	5
3.2	Standardeigenschaften des Modells	9
3.3	Existenz von Gleichgewichten	17
3.4	Qualität der Gleichgewichte	20
3.5	Beste-Antwort-Dynamik	25
4	Verkäufe mit fraktionaler Gruppenreihenfolge	28
4.1	Das Modell	28
4.2	Standardeigenschaften des Modells	29
4.3	Existenz von Gleichgewichten	31
5	Zusammenfassung und Ausblick	33
5.1	Zusammenfassung	33
5.2	Ausblick	33
	Abbildungsverzeichnis	35
	Tabellenverzeichnis	36
	Literaturverzeichnis	37

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Einleitung

In der nahen Vergangenheit kam es an verschiedenen Märkten immer wieder zu rapiden Preisfällen. Diese sind gut zu beobachten, wenn man große Aktienindizes betrachtet. Einer der bekanntesten Aktienindizes ist der, an der New Yorker Börse gelistete, Dow-Jones-Index. Dieser umfasst 30 US-amerikanische Unternehmen und nimmt den Durchschnitt der einzelnen Aktienkurse als seinen Kursindex. Dieser verlor am 6. Mai 2010 innerhalb von wenigen Minuten mehr als 9 % seines Kurswertes [Bayer et al., 2010]. Ein ähnliches Ereignis ergab sich am 7. Oktober 2016 an den asiatischen Devisenmärkten, wo das britische Pfund innerhalb weniger Minuten um bis zu 10 Prozent gegenüber dem US-Dollar fiel [Treanor et al., 2016]. Der Dow-Jones erholte sich innerhalb von 30 Minuten wieder nahezu komplett, das britische Pfund erholte sich nur bis zu einem Minus von 1,5 Prozent. Diese rapiden Preisverfälle ohne offensichtlichen Auslöser sind unter anderem auf das Handeln von automatisierten Tradern zurückzuführen und werden *flash crashes* genannt. Automatisierte Trader sind Algorithmen, welche nach vordefinierten Regeln auf dem Markt agieren und ein (teilweise) eigenständiges Abschließen von Käufen und Verkäufen durchführen. Auch wenn sich die Kurse in diesen Fällen nach dem *flash crash* wieder nahezu auf den alten Stand erholt haben, muss das nicht immer der Fall sein. Da die Preisverfälle in einem so kurzen Zeitraum stattfinden, ist es wichtig zu untersuchen, wie diese entstehen und wie sie sich verhalten. In [Bertschinger et al., 2022] wurde begonnen, diese *flash crashes* durch die Linse der algorithmischen Spieltheorie zu betrachten. In dieser Arbeit erweitern wir diesen Ansatz.

Wir simulieren die Märkte durch eine Menge von rationalen Agenten, von denen jeder ein eigenes Portfolio besitzt. Diese Portfolios bestehen aus riskanten Assets und einem festen Wert an risikolosen Assets. Jeder Agent kann einen Anteil an den riskanten Asset besitzen, muss es aber nicht. Wichtig ist aber, dass mehrere Agenten Anteile an dem gleichen Asset besitzen können. Die Assets nennen wir riskant, da ein Verkauf eines Anteils den Preis des Assets beeinflusst und somit auch

den Wert der Portfolios der anderen Agenten. Zusätzlich besitzt jeder Agent einen festen Wert an Schulden. Das Eigenkapital des Agenten bildet sich aus der Summe der gehaltenen Assets, plus den Erlösen der Asset-Verkäufe, minus den Schulden des Agenten.

Durch das Verhältnis von gehaltenen Assets zum Eigenkapital bildet sich ein *leverage*. Jeder Agent versucht sein Eigenkapital zu maximieren, muss dabei aber eine *leverage*-Bedingung erfüllen, also seine Strategie so wählen, dass sein eigener *leverage* kleiner gleich der *leverage*-Bedingung ist. Die *leverage*-Bedingung kann als eigene Grenze des Risikos angesehen werden, oder durch regulatorische Grenzen vorgegeben sein [o.B.S. Basel Committee, 2011]. Das Risiko entsteht hierbei, wenn der Agent gezwungen wird seine Schulden zu begleichen. Mit einem zu hohen *leverage* ist ein Agent gegebenenfalls nicht in der Lage alle seiner Schulden zu begleichen, besonders wenn die Assets währenddessen stark an Wert verlieren. Wenn die Agenten diese Bedingung nicht erfüllen, sind sie gezwungen einen Teil der Assets zu verkaufen und senken somit gegebenenfalls die Preise der Assets. Das kann dazu führen, dass die anderen Agenten ebenfalls handeln müssen und innerhalb von kurzer Zeit große Anteile der Assets verkauft werden. Somit entsteht ein *fire sale* Prozess.

1.2 Zielsetzung und Aufbau

Während in [Bertschinger et al., 2022] zwar eine große Bandbreite an Parametern untersucht wird, werden die Assets dort aber immer zu gleichen Teilen verkauft. Wir verallgemeinern dieses Modell in zwei Schritten. In Kapitel 3 untersuchen wir zuerst die Auswirkungen, wenn die Assets in Gruppen sortiert werden und diese nacheinander verkauft werden. In Kapitel 4 relaxieren wir diese strenge Ordnung und erlauben den Verkauf von mehreren Gruppen gleichzeitig. Die Aufteilung in Gruppen könnte beispielsweise eine Aufteilung nach dem Risiko der Assets sein. Ein Händler am Markt wird dann zuerst seine risikoreichen Assets verkaufen. Dabei wollen wir herausfinden, ob sich die Bildung von Gleichgewichten im Vergleich zu dem Modell aus [Bertschinger et al., 2022] unterscheidet und wie gut diese für die einzelnen Agenten beziehungsweise für die Gemeinschaft sind. Wir werden uns dabei zuerst in Abschnitt 3.2 und Abschnitt 4.2 mit den grundlegenden Eigenschaften der Modelle beschäftigen, dann in Abschnitt 3.3 und Abschnitt 4.3 die Existenz von Gleichgewichten untersuchen, sowie diese in Abschnitt 3.4 hinsichtlich ihrer Qualität beurteilen und ein Beispiel zeigen, in dem kein Gleichgewicht existiert. Zuletzt treffen wir in Abschnitt 3.5 eine Aussage darüber, wie lange es dauert, bis sich diese Gleichgewichte bilden können.

Kapitel 2

Literaturübersicht

Nicht erst seit automatisierte Trader in Finanzmärkten der ganzen Welt Verwendung finden, sind *fire sales* ein bekanntes Phänomen sind. Sie wurden sowohl von Banken und Aufsichtsbehörden, als auch aus einer akademischen Sicht, analysiert. Der Startschuss für diese Untersuchungen war die Weltfinanzkrise in 2009. Im Zuge dessen wurde das erste Mal von [Geanakoplos, 2009] und später von [Aymanns and Farmer., 2015] und [Aymanns et al., 2016] die Auswirkung einer *leverage*-Bedingung untersucht. [Cont and Schaanning, 2014] erweiterten dieses Modell und untersuchten die Auswirkungen einer *leverage*-Bedingung auf überlappende Portfolios mehrerer Agenten. In diesem Modell wurden von [Baes and Schaanning, 2020] mehrere worst-case Szenarien untersucht, wenn Agenten auf fallende Preise mit einer individuell optimalen Weise reagieren. Diese worst-case Szenarien werden auch in unserer Arbeit interessant, besonders wenn wir die Qualität der Gleichgewichte vergleichen (Beispiel 3.20). Diese Analysen wurden jedoch alle ohne den Ansatz der algorithmischen Spieltheorie gemacht. [Bertschinger et al., 2022] baut auf diesen Modellen auf und untersucht die spieltheoretischen Gleichgewichte in dem Spezialfall, in dem alle Agenten ihre Assets gleichmäßig verkaufen.

Ein weiteres Modell wurde von [Elliott et al., 2014] eingeführt, wobei eine Menge an Banken jeweils Anteile an den anderen Banken hält. Wenn eine Bank in ihrer Bewertung fällt, kann dies eine Kettenreaktion der anderen Banken auslösen und dafür sorgen, dass eine große Menge an Banken ebenfalls in ihrer Bewertung fallen. In diesem Effekt besteht eine Parallele zu den *fire sale Spielen*, da es einen kritischen Punkt gibt, ab dem das System außer Kontrolle gerät und die Agenten große Sprünge hinsichtlich ihrer Bewertung, oder ihres Nutzens machen. Dieses Modell wurde von [Hemenway and Khanna, 2015] in den Eigenschaften der Sensibilität und der Rechenkomplexität untersucht. Sie zeigen, dass selbst wenn eine Behörde über vollständige Information aller Agenten im System verfügt, es rechnerisch schwierig sein kann, die zukünftigen Schritte voraussagen zu können.

Die Untersuchung durch die Linse der Algorithmik und der Spieltheorie hat in den vergangenen Jahren zugenommen. So wurde beispielsweise das Modell für ein systematisches Risiko in Finanzmärkten von [Eisenberg and Noe, 2001] untersucht. [Bertschinger et al., 2020] untersucht eine strategische Version, in der Unternehmen rationale Agenten in einem gerichteten Graphen von Schulden sind. Dabei hat jeder Agent eine Strategie, wie er seine Schulden begleichen möchte. Die anderen Firmen zu denen er Schulden hat, werden dabei in einer Rangordnung priorisiert. Die Autoren untersuchen in diesem Modell die Rechenkomplexität von reinen Nash-Gleichgewichten, sowie starken Gleichgewichten und geben eine obere Schranke für die in der Spieltheorie relevanten Preise der Stabilität und Anarchie. Kürzlich haben [Hoefler and Wilhelmi, 2022] die Existenz von Gleichgewichten in diesem Minimal-Clearing-Problem in Verbindung mit Seniorities (Prioritäten von Schuldverträgen) untersucht. [Schuldenzucker et al., 2017] haben dieses Modell um die Credit-Default-Swaps erweitert, wodurch sie eine neue Art von systematischem Risiko aufdecken. Credit-Default-Swaps bezeichnen hierbei die Absicherung eines Schuldenvertrags durch eine andere Bank. Wenn eine Bank ihre Schulden nicht begleichen kann, übernimmt eine andere, den Schulden zugeordnete Bank, diese. Das führt dazu, dass nicht mehr direkt erkennbar ist, welche Bank nicht mehr Zahlungsfähig ist.

Durch Debt-Swaps, bei denen zwei Gläubigerbanken sich zum Austausch einer eingehenden Zahlungsverpflichtung entschließen, wurden in [Papp and Wattenhofer, 2021] die Möglichkeiten zur Risikominimierung untersucht. Dabei wurden worst-case-Schockmodelle beobachtet, bei denen ein Schock von einer Bank auf die schlechtmöglichste Weise verteilt wird. Sie haben gezeigt, dass durch Debt-Swaps die Verluste in einem solchen worst-case Umfeld minimiert werden können.

Kapitel 3

Verkäufe mit fester Gruppenreihenfolge

3.1 Das Modell

Das Markt Modell in [Bertschinger et al., 2022] basiert auf [Cont and Schaanning, 2014]. Wir werden das Modell in dieser Arbeit an verschiedenen Punkten erweitern.

Es existiert die Menge der Agenten $N = \{1, \dots, n\}$ und die Menge der liquiden Assets $M = \{1, \dots, m\}$. Bei den liquiden Assets handelt es sich um Assets, welche zu jeder Zeit liquidiert werden können. Somit haben sie aber auch ein hohes Risiko bezüglich eines Preisverfalls. Jeder Agent i hält einen Anteil x_{ij} der liquiden Assets in M . Die Anteile sind dabei normalisiert, sodass $x_{ij} \in [0, 1]$ und $\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \forall j \in M$. $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$ sei dabei die Vereinigung der einzelnen Anteile für Agent i . Zusätzlich wird jedem Asset eine fixe Gruppe \mathcal{G}_k zugeordnet. Die Menge der Gruppen bezeichnen wir $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_g\}$. Jedes $k \in \mathcal{G}$ besteht aus beliebig vielen, aber mindestens einem Asset. Die Assets einer Gruppe werden immer zu gleichen Teilen verkauft. Zusätzlich hält jeder Agent einen Wert $a_i^l > 0$ an nicht-liquiden Assets, welche nicht verkauft werden können und keine Wirkung auf den Preis der anderen Assets haben.

Jeder Agent i hat für jede Gruppe k eine Teilstrategie, welchen Anteil $y_{ik} \in [0, 1]$ er behalten und welchen Anteil $1 - y_{ik}$ er auf dem Markt verkaufen möchte. Die Assets in einer Gruppe werden dabei alle zu gleichen Anteilen verkauft/gehalten. Nach der Transaktion hält i den Anteil $y_{ik}x_{ij}$ des Assets j aus Gruppe k .

Dabei dürfen die Assets aus k aber erst verkauft werden, wenn alle Assets der Gruppen $\{1, \dots, k-1\}$ vollständig verkauft wurden, es muss also die Bedingung $y_{ik} < 1 \rightarrow y_{il} = 0 \forall l < k$ erfüllt sein. $y = ((y_{11}, \dots, y_{1m}), (y_{21}, \dots, y_{2m}), \dots, (y_{n1}, \dots, y_{nm}))$ bildet dabei das Strategieprofil aller Agenten für alle Asset-Gruppen im Spiel. Wir nennen diese Art von Spielen, *fire sale Spiele mit fester Gruppenreihenfolge*. Wenn jedes Asset in eine eigene Gruppe sortiert wird, entspricht das dem Spe-

zialfall mit einer Verkaufsreihenfolge, ohne Gruppen. Diesen Spezialfall nennen wir *fire sale Spiele mit fester Verkaufsreihenfolge*. Ein weiterer Spezialfall wurde in [Bertschinger et al., 2022] untersucht, wobei alle Assets zu gleichen Anteilen verkauft werden. Dieses Modell nennen wir *fire sale Spiele mit trivialer Gruppe (fire sale Spiele mit einer Gruppe)*. Später relaxieren wir die Bedingungen der Gruppenreihenfolge und erhalten *fire sale Spiele mit fraktionaler Gruppenreihenfolge*.

Jedes Assets besitzt eine Preisfunktion, welche abhängig von der Strategie der Agenten ist. Der Anteil an noch nicht verkauften Assets sei $x_j(y) := \sum_{i \in N} y_{ik} x_{ij}$, wobei y_{ik} die Strategie der Gruppe k ist, in der sich Asset j befindet. Die Preisfunktion ist somit abhängig von dem Anteil der noch nicht verkauften Assets $p_j(y) = p_j(x_j(y))$. Nach unten ist der Preis mit $p_j(\vec{0}) = 0$ und nach oben mit dem Startwert der Preisfunktion $p_j(\vec{1}) = p_j^0$ (alle Agenten spielen für dieses Asset die Strategie 1) festgelegt.

Wenn Assets verkauft werden, senkt das üblicherweise den Preis. Dieses Effekt nennen wir *price-impact*. Wir sagen, dass der *price-impact* linear ist, wenn die Preisfunktion für alle $j \in M$ linear zwischen 0 und p_j^0 interpoliert. Den *price-impact* nennen wir *konvex*, wenn p_j für alle j konvex ist und *konkav* wenn p_j konkav für alle j ist.

Die Summe der von i gehaltenen Assets ist

$$a_i(y) = a_i^I + \sum_{k \in \mathcal{G}} y_{ik} \sum_{j \in k} x_{ij} p_j(y).$$

Bei dem Verkauf macht es einen Unterschied, ob die Assets Stück für Stück verkauft werden und somit ein Teil der Assets zu dem alten (höheren) Preis verkauft und der Rest zu dem neuen (niedrigeren) Preis verkauft wird, oder ob alle Assets zusammen, zu einem geringeren Preis (Preis nach dem Verkauf) verkauft werden. Dieses Problem modellieren wir wie in [Cont and Schaanning, 2014] und führen einen *implementation shortfall parameter* $\alpha \in [0, 1]$ ein. Dieser bildet einen gewichteten Mittelwert über die Preise vor und nach dem Verkauf. Die Agenten erhalten den Anteil $1 - \alpha$ des ursprünglichen Preises und den Anteil α des Preises nach dem Verkauf. Wenn $\alpha = 0$ gewählt wird, findet das Spiel ohne einen *price-impact* statt (es wird dauerhaft mit dem Wert p_j^0 gehandelt) und bei $\alpha = 1$ wirkt sich ein Verkauf von Assets direkt zu 100% auf den Preis der Assets aus. In dieser Arbeit verwenden wir häufig den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$, da dort zwar eine Änderung des Preises stattfindet, diese aber nicht zu stark ist. Somit können einfachere Beispiele gefunden werden.

Die Gesamteinnahmen von i aus dem Verkauf der Assets, sind

$$\Delta_i(y) = \sum_{k \in \mathcal{G}} (1 - y_{ik}) \sum_{j \in k} x_{ij} ((1 - \alpha) \cdot p_j^0 + \alpha \cdot p_j(y)).$$

Jeder Agent hat *liabilities* von l_i zu externen Gläubigern. Die *equity* (das Eigenkapital) des Agenten i ist die Differenz zwischen der Summe der gehaltenen Assets und

der Verpflichtungen

$$e_i(y) = a_i(y) + \Delta_i(y) - l_i.$$

Wenn $e_i(y) > 0$, ist der *leverage* von i das Verhältnis zwischen der Summe der gehaltenen Assets und der *equity*

$$\text{lev}_i(y) = \frac{a_i(y)}{e_i(y)} = \frac{a_i(y)}{a_i(y) + \Delta_i(y) - l_i}.$$

Der *leverage* dient dazu, das Risiko in gehaltenen Assets zu messen, sodass man auch im Falle eines raschen Preisverfalls in der Lage ist, einen Teil der *liabilites* begleichen zu können. Dieser Mechanismus wird in [Aymanns and Farmer., 2015] näher untersucht. Ein Agent mit keinen risikoreichen Assets (d.h. $a_i(y) = a_i^I$) hat einen niedrigen *leverage* < 1 (sofern $e_i(y) > 0$ ist), während ein Agent mit vielen gehaltenen Assets und wenig verkauften Assets (d.h. ein großes $a_i(y)$ und ein kleines $\Delta_i(y)$) einen hohen *leverage* hat. Für $e_i(y) \leq 0$ ist der *leverage* nicht definiert.

Wir definieren eine regulatorische Konstante $\lambda > 1$ gegeben, sodass jeder Agent i seine Strategie so wählen muss, dass folgende *leverage*-Bedingung erfüllt ist

$$\text{lev}_i(y) \leq \lambda.$$

Wenn keine Strategie $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{im})$, welche die *leverage*-Bedingung erfüllt, existiert, sagen wir der Agent i ist *illiquide*, gegeben der Strategie y_{-i} der anderen Agenten. Wenn kein y_i existiert, für das $e_i(y) > 0$, sagen wir der Agent i ist *insolvent* unter y_{-i} . Die *utility* eines Agenten ist gleich ihrer *equity*, außer er ist *illiquide*, oder *insolvent* und verkauft nicht alle seiner gehaltenen Assets. In diesem Fall ist seine *utility* $= -\infty$. Dazu definieren wir die spezielle Strategie $y_i^0 = \vec{0}$.

$$u_i(y) := \begin{cases} -\infty & \text{if } y_i \neq y_i^0 \text{ und} \\ & (e_i(y) \leq 0 \text{ oder } \text{lev}_i(y) > \lambda) \\ e_i(y) & \text{ansonsten} \end{cases}$$

Beachte, dass i immer die Option hat, alles zu verkaufen und eine *utility* gleich zu seiner *equity* zu bekommen. Das ist daraus motiviert, dass die *leverage* Regularien einen Marktaustritt nicht verhindern sollen. In einem Nash-Gleichgewicht verkaufen *illiquide* und *insolvente* Agenten alles und liquide Agenten wählen entweder $y_i = y_i^0$, oder wählen y_i , sodass $e_i(y) > 0$ und $\text{lev}_i \leq \lambda$ erfüllt sind.

In diesem und in folgenden Beispielen werden zur besseren Übersichtlichkeit Asset-Gruppen, welche aus nur einem Asset bestehen nur als Asset und nicht als Asset-Gruppe dargestellt.

Beispiel 3.1. Wir betrachten ein Spiel mit 3 Asset-Gruppen, welche die Assets $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ beinhalten. Seien die Preisfunktionen von der Assets 1, 2 und 3 linear und die von Asset 4 convex mit $p_4(y) = p_4^0 \cdot (\sum_{i \in N} x_{i4} y_{i4})^2$. Die Startwerte seien

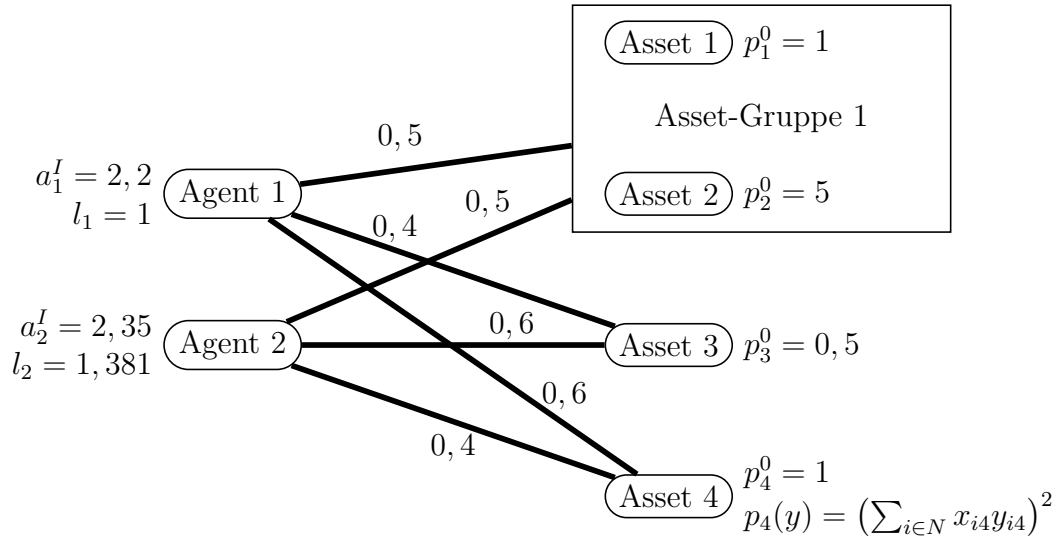


Abbildung 3.1: *Fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge.* (Beispiel 3.1). Seien dabei $\alpha = 0, 5$, $\lambda = 1, 4$ und die Preisfunktionen für ein Asset k konvex und alle anderen Assets linear.

definiert durch $p_1^0 = 1, p_2^0 = 5, p_3^0 = 0, 5$ und $p_4^0 = 1$. Des Weiteren sei $\alpha = 0, 5$ und $\lambda = 1, 4$. Das Spiel hat 2 Agenten, welche definiert werden durch $x_1 = (0, 5; 0, 4; 0, 6)$ und $x_2 = (0, 5; 0, 6; 0, 4)$, sowie $l_1 = 4, l_2 = 3, 9$ und $a_1^I = 5, a_2^I = 10$.

Die Agenten starten mit der Strategie $y_1^1 = \vec{1}$ und $y_2^1 = \vec{1}$ und wir betrachten eine parallele Abweichung, also dass jeder Spieler genau dann agiert, wenn er die leverage-Bedingung nicht erfüllt. Es ergeben sich folgende Reaktionen. Wir sehen, dass die Spieler in diesem Beispiel immer abwechselnd agieren und versuchen die leverage-Bedingung zu erfüllen. Ab Runde 4 ist Agent 1 insolvent. Agent 2 findet danach ein Gleichgewicht.

Runde	Strategien						utility		leverage	
	y_1			y_2			u_1	u_2	lev ₁	lev ₂
1	1	1	1	1	1	1	$-\infty$	9, 8	1, 46	1, 4
2	0	0, 12	1	1	1	1	4, 01	$-\infty$	1, 4	1, 48
3	0	0, 12	1	0, 65	1	1	$-\infty$	8, 02	1, 5	1, 4
4	0	0	0	0, 65	1	1	0	$-\infty$	1, 43	1, 42
5	0	0	0	0, 56	1	1	0	7, 66	1, 46	1, 4

Tabelle 3.1: Spielverlauf eines *fire sale Spiels mit fester Gruppenreihenfolge* (Beispiel 3.1). Wo bei ein Gleichgewicht entsteht, in dem Agent 1 insolvent ist. Die rote Markierung zeigt dabei, welche Agenten die *leverage*-Bedingung nicht erfüllen.

3.2 Standardeigenschaften des Modells

Wir zeigen, ähnlich wie in [Bertschinger et al., 2022], dass die Verkäufe eines Agenten das Portfolio der anderen Agenten destabilisiert und den *leverage* steigen lässt, sofern die Portfolios überlappend sind. Dies gilt auch, wenn nicht alle Assets zu gleichen Teilen verkauft werden, sondern eine Verkaufsreihenfolge mit Gruppen existiert. Da die *leverage*-Bedingung λ immer > 1 ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die *leverage*-Funktion nach unten durch 1 beschränken. Dies erleichtert den folgenden Beweis.

Proposition 3.2. *Sei $\hat{\text{lev}}_i(y) = \max(1, \text{lev}_i(y))$. Dann ist $\hat{\text{lev}}_i(y_i, y_{-i})$ monoton sinkend in y_{-i} . Genauer, wenn für zwei Strategieprofile, $y_{-i} \leq y'_{-i}$ punktweise gilt, dann gilt $\hat{\text{lev}}_i(y_i, y_{-i}) \geq \hat{\text{lev}}_i(y_i, y'_{-i})$.*

Beweis. Der Beweis aus [Bertschinger et al., 2022, Proposition 1] zeigt die Aussage für den Spezialfall der *fire sale Spiele mit trivialer Gruppe*. Wir zeigen, dass sie auch mit einer festen Gruppenreihenfolge gilt.

Es gilt nach wie vor durch die Annahme und der Monotonie der Preisfunktionen p_j , $p_j(y_i, y_{-i}) \leq p_j(y_i, y'_{-i}) \forall j$.

Wir betrachten zuerst den Spezialfall, wenn $\Delta_i(y_i, y_{-i}) > l_i$ gilt. Dann ist nach der Definition von lev_i , $\text{lev}_i(y_i, y_{-i}) < 1$. Also $\Delta_i(y_i, y'_{-i}) \geq \Delta_i(y_i, y_{-i}) > l_i$ und somit $\text{lev}_i(y_i, y'_{-i}) < 1$. Durch unsere untere Beschränkung der *leverage*-Funktion erkennen wir, dass $\hat{\text{lev}}_i(y_i, y_{-i}) = 1 = \hat{\text{lev}}_i(y_i, y'_{-i})$.

In den anderen Fällen ($\Delta_i(y_i, y_{-i}) \leq l_i$), gilt $\text{lev}_i(y_i, y_{-i}), \text{lev}_i(y_i, y'_{-i}) \geq 1$ und wir schreiben kurz $a := a_i(y_i, y_{-i})$, $a' := a_i(y_i, y'_{-i})$ und genauso für Δ , dann

$$\begin{aligned} \hat{\text{lev}}_i(y_i, y_{-i}) &= \text{lev}_i(y_i, y_{-i}) = \frac{a}{a + \Delta - l_i} \\ &\geq \frac{a'}{a' + \Delta - l_i} \geq \frac{a'}{a' + \Delta' - l_i} \\ &= \text{lev}_i(y_i, y'_{-i}) = \hat{\text{lev}}_i(y_i, y'_{-i}). \end{aligned}$$

Wobei die erste Ungleichheit gilt, da $\Delta - l_i \leq 0$ und $a \leq a'$ und die zweite Ungleichheit gilt, da $\Delta \leq \Delta'$, was aus der Monotonie von p_j folgt.

Für die unterschiedenen Fälle ($\Delta_i > l_i$, $\Delta_i \leq l_i$) und die angewendeten Ungleichungen ist es unerheblich in welcher Reihenfolge, oder in welchen Gruppen die Assets verkauft werden, da lediglich die Werte Δ_i und l_i verglichen werden und sich die Preisfunktionen p_j mit einer Gruppenreihenfolge nicht verändern (sie bleiben monoton).

□

Des Weiteren zeigen wir, dass die Kontinuität der *leverage*-Funktion. Dies wird uns in späteren Beweisen helfen die Beste-Antwort-Dynamik besser zu verstehen.

Proposition 3.3. *Die leverage-Funktion lev_i ist kontinuierlich in den Strategieprofilen y , solange der Agent i solvent ist.*

Beweis. Sei a ein beliebiges Strategieprofil, welches für fire sale Spiele mit fester Gruppenreihenfolge gültig ist und unter dem Agent i solvent ist. Da die Preisfunktionen nach Definition kontinuierlich sind, wissen wir, dass für alle j gilt

$$\lim_{y \rightarrow a} p_j(y) = p_j(a)$$

Somit muss die Summe der Preisfunktionen ebenfalls kontinuierlich sein.

$$\lim_{y \rightarrow a} \sum_{j \in M} p_j(y) = \sum_{j \in M} \lim_{y \rightarrow a} p_j(y) = \sum_{j \in M} p_j(a)$$

Also muss auch die folgende Funktion kontinuierlich sein.

$$a_i(y) = a_i^I + \sum_{k \in \mathcal{G}} y_{ik} \sum_{j \in k} x_{ij} p_j(y)$$

Das gleiche Verfahren können wir anwenden für

$$\Delta_i(y) = \sum_{k \in \mathcal{G}} (1 - y_{ik}) \sum_{j \in k} x_{ij} ((1 - \alpha) \cdot p_j^0 + \alpha \cdot p_j(y)).$$

Dies impliziert die Kontinuität von

$$\text{lev}_i(y) = \frac{a_i(y)}{a_i(y) + \Delta_i(y) - l_i},$$

solange der Nenner nicht 0 (m.a.W. $e_i(y) > 0$) ist. Für $e_i(y) \leq 0$ ist der Agent i nicht mehr solvent. \square

Nun zeigen wir noch, dass die leverage-Bedingung eine tatsächliche Auswirkung auf das Spiel hat. Genauer, dass ein Strategieprofil existiert, welches die Bedingung nicht erfüllt und die Agenten handeln müssen.

Proposition 3.4. *Sei i ein Agent und sei $(y^t)_t$ eine Sequenz von Strategieprofilen, sodass für alle t gilt, $e_i(y^t) > 0$ und $e_i(y^t) \rightarrow 0$. Dann ist $\text{lev}_i(y^t) \rightarrow \infty$. Es existiert also ein t für das gilt $\text{lev}_i(y^t) > \lambda$.*

Beweis. Dieser Beweis folgt aus der Definition von $\text{lev}_i = \frac{a_i(y)}{e_i(y)}$ und der Annahme, dass $e_i(y^t) \rightarrow 0$ und $e_i(y^t) > 0 \forall t$ und dem Wissen, dass $a_i(y^t) \geq a_i^I > 0$. Hierbei ist zu beachten, dass die Sequenz $(y^t)_t$ immer gültig unter der Gruppenbedingung sein muss, diese Bedingung beschränkt aber in diesem Fall die equity nicht. Es ist

möglich durch den Verkauf der Assets die *equity* beliebig weit zu senken, auch wenn man die Assets in Gruppen verkauft. \square

Um das Verhalten der Agenten genauer beschreiben und Aussagen über Gleichgewichte treffen zu können, beschäftigen wir uns in dieser Arbeit mit der Besten-Antwort-Funktion Φ . Diese gibt zu einem gegebenen Strategieprofil y die Reaktion aus, welche den Agenten den höchsten Nutzen (die höchste *utility*) verschafft. Da die Analyse der Funktion sehr abhängig von dem Parameter α und dem price-impact ist, teilen wir sie in mehrere Propositionen auf.

Proposition 3.5. *Sei $\alpha = 1$. Dann (1) maximiert jeder liquide Agent i seine utility, indem er alle y_{ik} maximiert und die leverage-Bedingung nicht überschreitet und (2) ist Φ monoton.*

Beweis. (1) Um die *utility* $u_i(y)$ zu maximieren, wollen wir die *equity* $e_i(y)$ maximieren und die *leverage*-Bedingung erfüllen. Für den Fall $\alpha = 1$ kürzt sich die *equity* zu

$$e_i(y) = a_i(y) + \sum_{j \in M} x_{ij} p_j(y) - l_i$$

und ist monoton in y_i , da y_i aus einer Menge von Teilstrategien y_{ik} für die Asset-Gruppen \mathcal{G}_k besteht und die Preis-Funktionen p_j monoton in y_{ik} sind. Die Beste-Antwort von i maximiert also alle y_{ik} unter der *leverage*-Bedingung. \square

Beweis. (2) Sei y_{-i} die Strategie aller Agenten außer i und sei y_{-i} fixiert und y_i^* die Beste-Antwort von Agent i . Dann gibt es drei Fälle:

- $y_i^* = \vec{0}$: In diesem Fall erfüllt i entweder genau die *leverage*-Bedingung, ist *insolvent*, oder *illiquide*. Also ist $\text{lev}_i(y_i^*, y_{-i}) \geq \lambda > 1$, oder undefiniert. Nach der Monotonie der *equity* und dem *leverage* in y_{-i} , muss der Agent die Strategie beibehalten, wenn die anderen Agent ihre Verkäufe erhöhen.
- $y_i^* = \vec{1}$: Wenn der Agent keine Assets verkauft hat und die anderen Agenten ihre Verkäufe erhöhen, erfüllt er entweder weiterhin die *leverage*-Bedingung, oder muss Assets verkaufen. Somit kommt er in Fall 3.
- $y_i^* \in [0, 1]^{|\mathcal{G}|}$: wobei genau ein $0 < y_{ik} < 1$ ist und alle anderen $y_{ik'} \in \{0, 1\}$. In diesem Fall muss der $\text{lev}_i(y_i^*, y_{-i}) = \lambda > 1$ und $\text{lev}_i(\hat{y}_i, y_{-i}) > \lambda$ für ein $\hat{y}_i > y_i^*$ sein. Wenn die anderen Agenten nun mehr verkaufen, bleibt \hat{y}_i invalide (nach der Monotonie des *leverages*. $y'_{-i} \leq y_{-i} \rightarrow \text{lev}_i(\hat{y}_i, y'_{-i}) \geq \text{lev}_i(y_i^*, y'_{-i}) > \lambda$). Der Agent muss also ebenfalls mehr verkaufen.

Wenn die anderen Agenten ihre Verkäufe erhöhen, bleibt i in seiner Strategie gleich, oder verkauft ebenfalls mehr. Φ ist daher monoton. \square

Proposition 3.5 hat gezeigt, dass die Beste-Antwort-Funktion für den Fall $\alpha = 1$ monoton ist. Wir wollen noch zeigen, dass die Beste-Antwort-Funktion Φ unabhängig von α monoton ist, sofern der price-impact konvex ist. Für den Fall $\alpha \in (0, 1)$ ist die *equity* jedoch nicht mehr zwingend monoton. Es stellt sich heraus, dass die Agenten entweder so wenig wie möglich oder alles verkaufen. Um zu beweisen, dass Φ dennoch monoton ist, zeigen wir zuerst, dass die *equity* stückweise *konvex* in y_i ist und betrachten dann Φ . Stückweise *konvex* meint hierbei, dass die *equity* in den Phasen *konvex* ist, in denen nur eine Asset-Gruppe verkauft wird.

Proposition 3.6. *Sei y_{-i} fixiert, der price-impact konvex und $\alpha \in (0, 1)$. Dann ist die equity $e_i(y_i, y_{-i})$ konvex in y_{ik} , wenn alle y_{il} mit $l \neq k$ fixiert sind und die equity $e_i(y_i, y_{-i})$ ist stückweise konvex in y_i .*

Beweis. Um die Konvexität von $e_i(y_i, y_{-i})$ in y_{ik} zu beweisen, fixieren wir alle Spieler außer i und betrachten i in einer fixierten Phase k . Wir zeigen, dass die erste Ableitung der *equity* nach y_{ik} , monoton steigend unter y_{ik} ist und können so schlussfolgern, dass die *equity* sich innerhalb dieser Phase *konvex* verhält

Dazu definieren wir uns die Strategien $y_i = (y_{ik}, y_{i-k}) < \hat{y}_i = (\hat{y}_{ik}, y_{i-k})$, wobei y_{i-k} die Strategie von Spieler i , ohne Asset-Gruppe k ist (beachte, dass alle Strategien y_{il} mit $l < k$ nach der Gruppenreihenfolge 0 und alle y_{il} mit $l > k$, 1 sein müssen).

Um die folgende Rechnung übersichtlicher zu machen, verwenden wir folgende Abkürzungen. \hat{p}_j als Abkürzung für $p_j(\hat{y}_i, y_{-i})$, sowie p'_j für $\frac{\partial p_j(y_i, y_{-i})}{\partial y_{ik}}$ und \hat{e}_i für $\hat{e}_i(y_i, y_{-i})$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_i}{\partial y_{ik}} &= \frac{\partial(a_i(y_i, y_{-i}) + \Delta_i(y_i, y_{-i}) + l_i)}{\partial y_{ik}} \\
&= \sum_{j \in k} \left(y_{ik} x_{ij} p'_j(y) + x_{ij} p_j(y) + x_{ij} \alpha p'_j(y) - y_{ik} x_{ij} \alpha p'_j(y) \right. \\
&\quad \left. - x_{ij} (1 - \alpha) p_j^0 - \alpha p_j(y) \right) + \sum_{k' \in \mathcal{G} \setminus k} 0 \\
&= \sum_{j \in k} x_{ij} \left((\alpha - 1) p_j^0 + (1 - \alpha) p_j(y) + (y_{ik} + \alpha - y_{ik} \alpha) p'_j(y) \right) \\
&\leq \sum_{j \in k} x_{ij} \left((\alpha - 1) p_j^0 + (1 - \alpha) \hat{p}_j(y) + (y_{ik} + \alpha - y_{ik} \alpha) \hat{p}'_j(y) \right) \\
&\leq \sum_{j \in k} x_{ij} \left((\alpha - 1) p_j^0 + (1 - \alpha) \hat{p}_j(y) + (\hat{y}_{ik} + \alpha - \hat{y}_{ik} \alpha) \hat{p}'_j(y) \right) \\
&= \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial \hat{y}_i}
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung gilt, da die Preisfunktionen p_j und ihre Ableitung monoton in y_{ik} sind und $(1 - \alpha \geq 0)$, sowie $(y_{ik} + \alpha - y_{ik} \alpha \geq 0)$. Die zweite Ungleichung gilt, da $(y_{ik} + \alpha - y_{ik} \alpha < \hat{y}_{ik} + \alpha - \hat{y}_{ik} \alpha)$.

Für jede Teilstrategie y_{ik} ist die *equity konvex* in der Phase des Verkaufs von Asset-Gruppe k . Da alle Gruppen $k \in \mathcal{G}$ hintereinander verkauft werden, ist die *equity* stückweise *konvex* in y_i . \square

Durch die Konvexität der *equity* in den Phasen entsteht ein interessanter Effekt, welcher als *bank-run* Effekt bezeichnet wird. Wenn die Agenten Anteile an ihren Asset-Gruppen verkaufen, kann es sich für einen Agenten mehr lohnen alle Anteile an einer Asset-Gruppe zu verkaufen, obwohl er dieses nicht machen müsste um die *leverage*-Bedingung zu erfüllen. Sie verkaufen von einer Assetgruppe jeweils entweder so wenig wie möglich, oder alles. Dieser Effekt kann zu zu einem schlagartigen Verkauf vieler Anteile führen und destabilisiert die Preise so enorm.

Als nächstes zeigen wir, dass in dem Bereich, in dem nur eine Asset-Gruppe verkauft wird, die Beste-Antwort-Funktion Φ monoton ist, auch wenn der price-impact *konvex* ist. Wenn wir wissen, dass Φ in diesem Bereich monoton ist, ist es einfacher zu zeigen, dass Φ insgesamt monoton ist.

Proposition 3.7. *Nimm einen konvexen price-impact an und sei $\alpha \in (0, 1)$. Dann ist jede Beste-Antwort-Funktion Φ_{ik} monoton, wenn die Strategien aller anderen Agenten y_{-i} fixiert sind und wir eine fixierte Phase k betrachten.*

Beweis. Aufgrund der Konvexität der *equity* innerhalb der Phase k (Proposition 3.6) und dem damit verbundenen *bank-run* Effekt, wird die Beste-Antwort entweder gefunden indem $y_{ik}^0 := 0$ gewählt, oder indem y_{ik} maximiert wird bis $\text{lev}_i(y) = \lambda$. y_{ik}^{max} sei der maximale *leverage*-Bedingung erfüllende Wert für y_{ik} und $y_{ik}^{max} = 0$, wenn kein solcher Wert existiert. Dann lässt sich die Beste-Antwort definieren als

$$\Phi_{ik}(y_{ik}, y_{-ik}) = \arg \max_{y_{ik} \in \{y_{ik}^0, y_{ik}^{max}\}} u_i(y_{ik}, y_{-ik}).$$

y_{ik}^0 ist trivialerweise monoton.

Die Monotonie von y_{ik}^{max} folgt aus der Monotonie von lev_i Proposition 3.3, da stets die höchste Strategie gewählt wird, welche die *leverage*-Bedingung erfüllt und die Funktion lev_i monoton ist.

Die Monotonie des Übergangs zwischen y_{ik}^0 und y_{ik}^{max} wurde bereits in [Bertschinger et al., 2022, Proposition 6] gezeigt. Wir betrachten hier den Fall, in dem nur auf einer Asset-Gruppe agiert wird und die anderen fixiert sind. Daher hat die Gruppenreihenfolge keine Auswirkung und das Spiel unterscheidet sich somit nicht von einem *fire sale Spiel mit trivialer Gruppe*. \square

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass die Beste-Antwort-Funktion auch monoton ist, wenn die anderen Asset-Gruppen nicht fixiert sind.

Proposition 3.8. *Nimm einen konvexen price-impact an und sei $\alpha \in (0, 1)$. Dann ist die Beste-Antwort-Funktion Φ_i monoton.*

Beweis.

$$\Phi_i(y_i, y_{-i}) = (\Phi_{i1}(y_i, y_{-i}), \dots, \Phi_{ik}(y_i, y_{-i}), \dots, \Phi_{i|G|}(y_i, y_{-i}))$$

Aus Proposition 3.6 wissen wir, dass die Φ_{ik} monoton sind.

Zeigen müssen wir noch, dass der Übergang zwischen den Φ_{ik} monoton ist. In anderen Worten, dass die Gruppen nacheinander verkauft werden und es für i nicht lohnt mit einer entgegengesetzten Strategie zu den Gegner zu agieren (zum Beispiel Gegner verkaufen mehr und i verkauft weniger). Also wenn $y_{-i} \leq y'_{-i}$, auch $\Phi_i(y_{-i}) \leq \Phi_i(y'_{-i})$ gilt.

Wenn i insolvent unter y_{-i} ist, dann ist $y_i = \vec{0}$ und der Beweis trivial.

Wenn i solvent unter y_{-i} , dann ist er es durch die Monotonie der lev_i Proposition 3.2 auch in y'_{-i} .

Sei $\hat{y}_i := \Phi_i(y_i, y_{-i})$. Wir betrachten folgende Untersuchung für alle \tilde{y}_i , für die $\tilde{y}_i < \hat{y}_i$ gilt. Beachte dabei, dass \tilde{y}_i gültig unter der Verkaufsreihenfolge sein muss, also Assets nur dann verkauft, wenn alle Vorgänger verkauft wurden. Sei y_{ik} die Asset-Gruppe welche in \hat{y}_i nicht 0, oder 1 ist (durch die Gruppenreihenfolge kann es nur eine solche Strategie geben). Dann können sich \hat{y}_i und \tilde{y}_i in beliebig vielen Strategien y_{il} unterscheiden, allerdings nur in den wo $l < k$. Es bleibt zu zeigen, dass wenn $e_i(\tilde{y}_i, y_{-i}) < e_i(\hat{y}_i, y_{-i})$, dann auch $e_i(\tilde{y}_i, y'_{-i}) < e_i(\hat{y}_i, y'_{-i})$. Wir zeigen die Behauptung in zwei Schritten.

(1)

$$e_i(\tilde{y}_i, y'_{-i}) < e_i(\hat{y}_i, y'_{-i}):$$

$$\tilde{\delta}_j = p_j(\tilde{y}_i, y'_{-i}) - p_j(\tilde{y}_i, y_{-i})$$

$$\hat{\delta}_j = p_j(\hat{y}_i, y'_{-i}) - p_j(\hat{y}_i, y_{-i})$$

Für alle $j \in M$ gilt $\tilde{\delta}_j, \hat{\delta}_j \geq 0$ (durch die Monotonie von p_j) und $\tilde{\delta}_j \leq \hat{\delta}_j$.

Um letzteres zu zeigen, betrachten wir die drei möglichen Fälle:

- Beide Strategien halten keine Anteile an j . Dann ist $\tilde{\delta}_j = \hat{\delta}_j$.
- Beide Strategien halten den gleichen Anteil von j . Dann ist $\tilde{\delta}_j = \hat{\delta}_j$.
- Die Strategie \hat{y}_i hält mehr Anteile von j als \tilde{y}_i . Dann ist $\tilde{\delta}_j < \hat{\delta}_j$.
(Folgt aus Konvexität und Monotonie von p_j)

Mit den Definitionen ergibt sich:

$$a_i(\tilde{y}_i, y'_{-i}) = a_i(\tilde{y}_i, y_{-i}) + \sum_{k \in \mathcal{G}} \tilde{y}_{ik} \sum_{j \in k} x_{ij} \tilde{\delta}_j$$

$$\Delta_i(\tilde{y}_i, y'_{-i}) = \Delta_i(\tilde{y}_i, y_{-i}) + \alpha \sum_{k \in \mathcal{G}} (1 - \tilde{y}_{ik}) \sum_{j \in k} x_{ij} \tilde{\delta}_j$$

und analog für \hat{y}_i .

Dies kann man Zusammenführen zu:

$$\begin{aligned} e_i(\tilde{y}_i, y'_{-i}) &= a_i(\tilde{y}_i, y'_{-i}) + \Delta_i(\tilde{y}_i, y'_{-i}) - l_i \\ &= a_i(\tilde{y}_i, y_{-i}) + \Delta_i(\tilde{y}_i, y_{-i}) - l_i + \sum_{k \in \mathcal{G}} (\tilde{y}_{ik} + (1 - \tilde{y}_{ik}) \alpha) \sum_{j \in k} x_{ij} \tilde{\delta}_j \\ &= e_i(\tilde{y}_i, y_{-i}) + \sum_{k \in \mathcal{G}} (\alpha + (1 - \alpha) \tilde{y}_{ik}) \sum_{j \in k} x_{ij} \tilde{\delta}_j \end{aligned}$$

Genauso wie für

$$e_i(\hat{y}_i, y'_{-i}) = e_i(\hat{y}_i, y_{-i}) + \sum_{k \in \mathcal{G}} (\alpha + (1 - \alpha) \hat{y}_{ik}) \sum_{j \in k} x_{ij} \hat{\delta}_j$$

Das Statement folgt nun aus der Annahme, dass $e_i(\hat{y}_i, y_{-i}) > e_i(\tilde{y}_i, y_{-i})$, sowie $\hat{y}_{ik} \geq \tilde{y}_{ik}$ und $\hat{\delta}_j \geq \tilde{\delta}_j$.

(2)

$$e_i(\tilde{y}_i, y'_{-i}) < e_i(\hat{y}_i, y'_{-i}):$$

Die oben untersuchten \tilde{y}_i bilden eine große Menge an Strategien. Aufgrund der Konvexität von p_j nimmt die Funktion e_i an dem Punkt \hat{y}_i' , oder an einem aus der Menge der \tilde{y}_i ihr Maximum an.

Nach (i) ist dies keiner der Punkte \tilde{y}_i (da diese stets eine geringere *equity* als \hat{y}_i' haben). Daher muss es bei \hat{y}_i' sein.

□

Durch die Wahl von α und der damit verbundenen stückweisen Konvexität der *equity* kann in einem Spiel mit mehreren Asset-Gruppen ein wiederholter *bank-run* Effekt auftreten. Selbst wenn sich die *equity* dadurch in späteren Schritten immer weiter verschlechtert, also sich das Abweichen in einem Schritt für den Spieler lohnt, aber nach der Reaktion der anderen Spieler die *equity* geringer als zu Beginn ist. In anderen Worten, man entfernt sich vom sozialen Optimum.

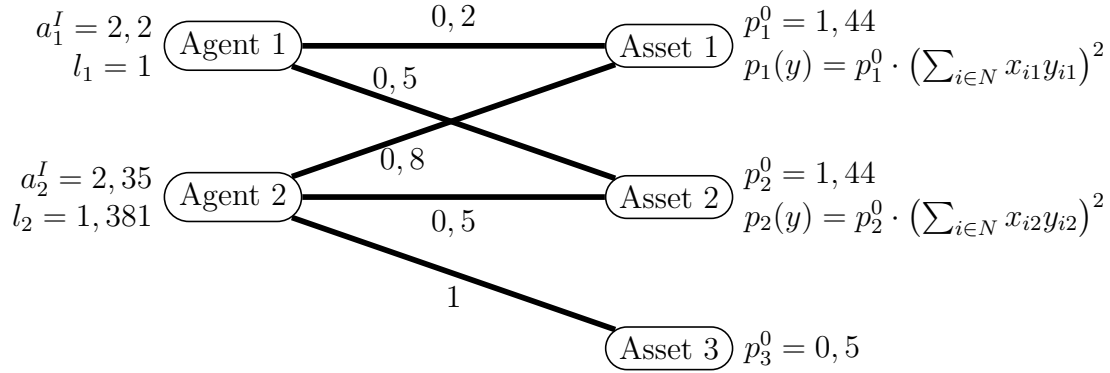


Abbildung 3.2: *Fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge und mehreren bank-run Effekten.* (Beispiel 3.9). Seien dabei $\alpha = 0, 2$, $\lambda \approx 1, 425$, zwei Preisfunktionen konvexen und eine linearen.

Beispiel 3.9. Wir betrachten ein Spiel mit 3 Asset-Gruppen mit jeweils einem Asset und zwei Agenten. Sei $\alpha = 0, 2$ und $\lambda \approx 1, 425$. Die Preisfunktionen sind definiert durch $p_j(y) = (\sum_{i \in N} x_{ij} y_{ij})^2$ für $j \in \{1, 2\}$ und p_3 besitzt eine lineare Preisfunktion, sowie den Startwerten $p_1^0, p_2^0 = 1, 44$ und $p_3^0 = 0, 5$. Die Agenten sind definiert durch $a_1^I = 2, 2$, $a_2^I = 2, 35$ und $l_1 = 1, l_2 = 1, 381$. Sie halten die Anteile an den Asset-Gruppen nach $x_{11} = 0, 2, x_{12} = 0, 5$ und $x_{13} = 0$, sowie $x_{21} = 0, 8, x_{22} = 0, 5$ und $x_{23} = 1$.

Zu Beginn spielen die Agenten die Strategien $y_1 = (0, 8; 1; 1)$ und $y_2 = (1; 1; 1)$ und erfüllen mit $\text{lev}_1(y) \approx 1, 4253, \text{lev}_2(y) \approx 1, 4245$ die leverage-Bedingung. Agent 1 kann jedoch durch den bank-run Effekt auf Asset-Gruppe 1, also mit der Strategie $y_1 = (0; 1; 1)$ seine utility von $u_1(y) = 2, 186$ auf $2, 187$ erhöhen. Dadurch steigt der leverage von Agent 2 aber auf $\approx 1, 471 > 1, 425$ und er muss seine Verkäufe auf $y_{21} = 0, 85$ erhöhen.

$\text{lev}_1(y)$ steigt dann auf $\approx 1, 435$ und Agent 1 muss ebenfalls seine Verkäufe auf $y_{12} = 0, 8$ erhöhen. In diesem Fall greift wieder der bank-run Effekt, er wird seine Strategie zu $y_1 = (0; 0; 1)$ ändern und seine utility von $u_i(y) \approx 2, 01$ auf $\approx 2, 066$ verbessern können. Die leverage-Bedingung erfüllt er mit $\text{lev}_1(y) \approx 1, 065$ ebenfalls. Nach diesen drei Schritten ist die utility von 1 aber von $2, 186$ auf $\approx 2, 066$ gesunken.

Um das Verhalten der Preise im Spiel genauer zu verstehen, untersuchen wir die Gleichgewichte näher. In dieser Analyse werden wir häufig dem bank-run Effekt begegnen, da dieser einen rapiden Preisverfall verursachen und somit stabile Zustände verhindern kann.

3.3 Existenz von Gleichgewichten

In dem vorherigen Teil haben wir uns mit den Standardeigenschaften des Modells beschäftigt. Nun möchten wir diese Erkenntnisse nutzen, um Aussagen über die Existenz von Gleichgewichten zu treffen. Wir werden die Ergebnisse erhalten, dass in jedem Spiel ein Gleichgewicht gefunden werden kann und durch die monotone Beste-Antwort-Funktion die Gleichgewichte ein Gitter formen. Jedoch werden wir auch sehen, dass die Agenten bei bestimmten Eingaben und gleichzeitigem anwenden der Besten-Antwort-Funktion ein zyklisches Antwortverhalten entwickeln und sich somit nicht auf ein Gleichgewicht einigen können, obwohl sie ein Gleichgewicht erreichen könnten, wenn sie nacheinander Reagieren würden.

Lemma 3.10. *Nimm an, dass die Beste-Antwort-Funktion Φ monoton ist. Sei E die Menge der Nash-Gleichgewichte. Dann ist E nicht-leer und das Paar (E, \geq) formt ein vollständiges Gitter.*

Beweis. D sei das Set aller Strategieprofile in der alle Strategien y zu finden sind, welche unter der Gruppenreihenfolge-Bedingung gültig sind. Die Strategien unterstehen einer Ordnungsrelation, in der alle Komponenten paarweise verglichen werden. Durch die Eigenschaft der festen Gruppenreihenfolge ist immer genau entscheidbar, welche der beiden paarweise verglichenen Komponenten größer ist. Somit formt (E, \geq) ein vollständiges Gitter.

Die Funktion $\Phi : D \rightarrow D$ berechnet für ein gegebenes Strategieprofil y , die Beste-Antwort y^* . Somit ist $\Phi(y) = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ das Strategieprofil, nachdem alle Agenten gleichzeitig ihre Beste-Antwort berechnet haben. Die Fixpunkte der Funktion sind die Nash-Gleichgewichte, da die Spieler in diesen Punkten keinen Anreiz haben von ihrer Strategie abzuweichen. Nach Proposition 3.8 ist Φ monoton. Das Knaster-Tarski Theorem [Tarski, 1955] zeigt somit unsere Aussage. \square

Mit Lemma 3.10, Proposition 3.5 und Proposition 3.8 können wir schlussfolgern:

Theorem 3.11. *Sei (1) $\alpha = 1$, oder (2) p_j konvex für alle j und E die Menge der Nash-Gleichgewichte. Dann ist E nicht-leer und das Paar (E, \geq) formt ein vollständiges Gitter. Das heißt es existiert mindestens ein Gleichgewicht.*

Durch iteratives Anwenden der Besten-Antwort-Funktion Φ , konvergieren die Agenten zu dem punktweisen besten Gleichgewicht, sofern das Theorem 3.11 gilt, also wenn $\alpha = 1$, oder p_j konvex .

Theorem 3.12. *Sei (1) $\alpha = 1$, oder (2) p_j konvex für alle j . Sei (y^t) die Iterations-Sequenz, welche definiert ist durch $y^1 = (1, \dots, 1)$ und $y^{t+1} = \Phi(y^t)$. Dann konvergiert $(y^t)_t$ zum punktweise maximalen Gleichgewicht.*

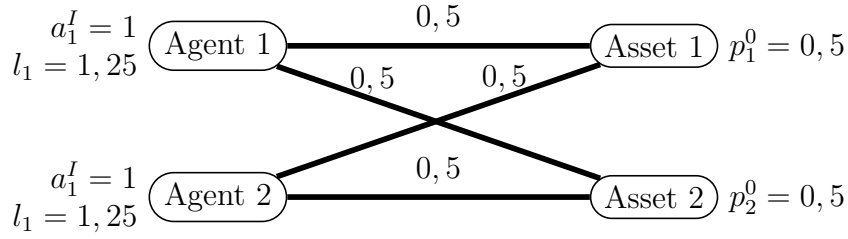


Abbildung 3.3: *Fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge*, in dem die Agenten mit dem initialen Strategieprofil $y^0 = ((1, 1), (0, 0))$ bei gleichzeitigem Abweichen kein Gleichgewicht erreichen (Beispiel 3.13). Seien dabei $\alpha = 1$, $\lambda = 6$ und die Preisfunktionen linear.

Beweis. Um dieses Theorem zu beweisen, verwenden wir den Beweis aus [Bertschinger et al., 2022, Theorem 2]. Die Aussage folgt aus dem Fakt, dass Φ monoton und kontinuierlich von oben ist. Φ ist nach Proposition 3.5 (für $\alpha = 1$) und Proposition 3.8 (für p_j konvex) in beiden Fällen monoton.

Um zu zeigen, dass Φ kontinuierlich von oben ist, übernehmen wir die Definition $D_i(y_{-i}) = \{y_i | e_i(y_i, y_{-i}) > 0 \wedge \text{lev}_i(y_i, y_{-i}) \leq \lambda\}$ als die Menge der möglichen Strategien, in denen i solvent unter y_{-i} ist und $E_i^\lambda = \{y_{-i} | D_i(y_{-i}) \neq \emptyset\}$ als Menge der Strategien y_{-i} unter denen i eine solvente Strategie findet. Wobei $D_i(y_{-i})$ und somit auch E_i^λ nach Proposition 3.4 (Es existiert ein y^t für dass $\text{lev}_i(y^t) > \lambda$) eine geschlossene Menge bilden. Die Mengen D_i und E_i sind monoton, sodass für jedes $y_{-i} \leq y'_{-i}$ punktweise, gilt $D_i(y_{-i}) \subseteq D_i(y'_{-i})$ und wenn $y_{-i} \in E_i$, dann auch $y'_{-i} \in E_i$. Diese Aussage folgern wir aus Proposition 3.2, da lev_i mit der Gruppenreihenfolge monoton in y_{-i} bleibt und e_i ebenfalls monoton ist. lev_i ist ebenfalls noch kontinuierlich wie Proposition 3.3 zeigt. Somit kann der Beweis aus [Bertschinger et al., 2022, Theorem 2] angewendet werden. \square

Wir haben gezeigt, dass für die Fälle $\alpha = 1$, oder p_j konvex ein maximales Gleichgewicht gefunden werden kann, indem man Schritt für Schritt die Beste-Antwort auf die Strategie der Gegner sucht (Theorem 3.11). Gestartet wird dabei von der Strategie y^1 . Jedoch ist es möglich, dass die Agenten nicht auf dieses Gleichgewicht stoßen, wenn sie nicht bei y^1 starten und immer gleichzeitig ihre Strategie anpassen. Anstatt dass die Agenten ein Gleichgewicht erreichen, befinden sie sich in einem Zyklus, in dem sie abwechselnd immer wieder die gleichen Strategien spielen. Es bildet sich also kein Gleichgewicht.

Beispiel 3.13. *Wir betrachten ein Spiel mit zwei Asset-Gruppen mit jeweils einem Asset. Sei das Spiel definiert durch $\alpha = 1$, $\lambda = 6$ und die Preisfunktionen haben die Startwerte $p_1^0, p_2^0 = 0, 5$. Das Spiel besitze zwei Agenten, welche definiert sind durch $a_1^I, a_2^I = 1$ und $l_1, l_2 = \frac{5}{4}$. Des Weiteren halten sie $x_{11}, x_{21} = 0, 5$ und $x_{12}, x_{22} = 0, 5$ Anteile an den Assets. Wenn beide Agenten die Strategien $y_1^1 = (1, 1)$ und $y_2^1 = (1, 1)$*

spielen, ist der leverage für beide Agenten $\text{lev}_i = \frac{1,5}{0,25} = 6 = \lambda$. Wenn ein Agent die Strategie $y^0 = (0,0)$ spielt, ist der andere illiquide und muss ebenfalls y^0 spielen. Wenn die Agenten allerdings mit den Strategien $y_1 = y^1$ und $y_2 = y^0$ starten und gleichzeitig reagieren, wird sich ein Zyklus bilden. Agent 2 kann seine utility erhöhen, indem er auf $y_2 = y^1$ wechselt. Agent 1 hingegen ist illiquide und muss auf $y_1 = y^0$ wechseln. Da die Agenten gleichzeitig reagieren, ergibt sich die Folge von Strategien $y^{(2i)} = (y_1^0, y_2^1)$ und $y^{(2i+1)} = (y_1^1, y_2^0)$.

In Lemma 3.10, Theorem 3.11 und Theorem 3.12 verallgemeinern wir die Ergebnisse für den Spezialfall der *fire sale Spiele mit trivialer Gruppe*. Dies ist möglich, da die Beste-Antwort-Funktion Φ nach wie vor monoton ist. Das hat zur Folge, dass sich die Beste-Antwort-Dynamik gleich verhält und somit die meisten Erkenntnisse weiterhin gültig sind.

3.4 Qualität der Gleichgewichte

In diesem Unterkapitel diskutieren wir die Qualität von Nash-Gleichgewichten für *fire sale Spiele mit Gruppenreihenfolge*. Dazu betrachten wir den Fall einer monotonen *equity* ($\alpha = 1$) und zeigen, dass das Pareto-optimale Strategieprofil y ein Nash-Gleichgewicht formt und somit ein einzigartiges starkes Gleichgewicht darstellt. Für den Fall einer konvexen *equity* ($\alpha \in (0, 1)$ und p_j *konvex*) formt das soziale Optimum dabei nicht zwingend ein Gleichgewicht.

Zur Berechnung der sozialen Wohlfahrt benutzen wir, wie in [Bertschinger et al., 2022] die utilitaristische Wohlfahrtsfunktion (Benthamsche Nutzenfunktion), wobei jeder insolvente oder illiquide Agent i die Strategie $y_i = \vec{0}$ spielt. Die Berechnungsformel ändert sich leicht zu

$$\begin{aligned} SW(y) &= \sum_{i \in N} u_i(y) = \sum_{i \in N} e_i(y) = \sum_{i \in N} a_i^I - \sum_{i \in N} l_i + \alpha \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} x_{ij} p_j(y) \\ &\quad + (1 - \alpha) \sum_{k \in \mathcal{G}} \sum_{j \in k} x_{ij} (y_{ik} p_j(y) + (1 - y_{ik}) p_j^0). \end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ können wir die Formel verkürzen auf

$$\begin{aligned} SW(y) &= \sum_{i \in N} u_i(y) = \sum_{i \in N} e_i(y) \\ &= \sum_{i \in N} a_i^I - \sum_{i \in N} l_i + \sum_{j \in M} p_j(y). \end{aligned}$$

Also wird die soziale Wohlfahrt optimiert, indem jeder Agent seine *leverage*-Bedingung erfüllt, oder $y_i = 0$ wählt. In Theorem 3.16 zeigen wir, dass mit einer Gruppen-Verkaufsreihenfolge und monotoner *equity* jedes Profil mit optimaler sozialer Wohlfahrt auch ein starkes Gleichgewicht ist.

Definition 3.14. *Sei y ein Gleichgewicht für ein fire sale Spiel, dann nennen wir y ein starkes Gleichgewicht, wenn es ein Nash-Gleichgewicht ist, welches auch gegen Abweichungen von Koalitionen resistent ist und alle Agenten in der Koalition strikt davon profitieren ihre Strategie zu spielen.*

Definition 3.15. *Sei y ein Strategieprofil für ein fire sale Spiel, dann nennen wir y ein Pareto-Optimum, falls kein anderes Strategieprofil y' existiert, indem für alle Agenten i : $u_i(y') \geq u_i(y)$ gilt und mindestens ein Agent einen echten Vorteil in y' hat, also $u_i(y') > u_i(y)$.*

Theorem 3.16. *Sei die equity $e_i(y_i, y_{-i})$ monoton in y_i für jeden Spieler i . Dann ist jedes Pareto-Optimum ein starkes Gleichgewicht.*

Beweis. Hier können wir den Beweis aus [Bertschinger et al., 2022, Theorem 3] übernehmen. Sei y ein Pareto-Optimum und wir nehmen an, dass y kein starkes Gleichgewicht ist, um einen Widerspruch zu zeigen. Es existiert eine Koalition $C \subseteq N$ und eine Strategie $y' = (y'_C, y_{-C})$, sodass alle Agenten in C davon profitieren, als Koalition abzuweichen. Wir berachten von der Koalition C nun nur die Agenten, welche ihre Verkäufe verringern $C^+ = \{i \in C \mid y'_i > y_i\}$. Bemerke, dass es Agenten geben kann, welche ihre *utility* erhöhen, obwohl sie die Verkäufe erhöhen. Diese können beispielsweise vom *bank-run* Effekt gebrauch machen. Die Menge C^+ ist nach Monotonie der *equity* wie in [Bertschinger et al., 2022, Theorem 3] nicht-leer. $y'' = (y'_{C^+}, y_{-C^+})$ bildet die Strategie, in der nur Agenten aus C^+ abweichen. Wir zeigen, dass y'' ein strenge Pareto-Verbesserung gegenüber y ist und somit der Optimalität von y widerspricht. Dazu betrachten wir die beiden Fälle $i \in C^+$ und $i \notin C^+$. Für denn Fall $i \in C^+$ zeigen wir, dass $u_i(y'') > u_i(y)$. Da der Agent seine Strategie zu $y'_i > 0$ geändert hat, muss er in dieser die *leverage*-Bedingung erfüllen (sonst hätte er durch die Definition der *utility* seine Verkäufe nicht erhöht). Somit gilt,

$$\text{lev}_i(y'') = \text{lev}_i(y', y''_{-i}) \leq \text{lev}_i(y'_i, y'_{-i}) \leq \lambda.$$

Wobei die erste Gleichung nach der Definition von C^+ und die erste Ungleichung durch die Monotonie des *leverages* in y_{-i} (Proposition 3.2) gilt.

Für den Fall $i \notin C^+$ zeigen wir $u_i(y'') = u_i(y_i, y''_{-i}) \geq u_i(y)$. Bemerke, dass nach der Definition immer $y''_{-i} \geq y_{-i}$ gilt und y_i gleich bleibt. Wenn die anderen Agenten von y_{-i} auf y''_{-i} erhöhen und y_i gleich bleibt, wird e_i immer steigen (nach der Monotonie der *equity* in y_{-i}) und i nur von insolvent zu solvent wechseln (nach der Monotonie der *equity* in y_{-i}) und von illiquide zu liquide gehen (nach der Monotonie von lev_i in y_{-i} Proposition 3.2), nicht andersherum. Somit ist es in jedem Fall eine Verbesserung für i .

Wir haben also ein y'' gefunden, welches eine strenge Pareto-Verbesserung verglichen mit y ist. Das kann aber nicht sein, da y bereits ein Pareto-Optimum ist. Somit ergibt sich ein Widerspruch und y muss auch ein starkes Gleichgewicht sein.

Wir konnten hier problemlos das [Bertschinger et al., 2022, Theorem 3] verallgemeinern, da sich die Berechnung der *utility* und des *leverages* mit der Verkaufsreihenfolge nicht verändert haben und Proposition 3.2 immer noch gilt.

□

Für Spiele mit $\alpha = 1$, zeigt Theorem 3.11, dass die Menge der Nash-Gleichgewichte ein vollständiges Gitter formt. Des Weiteren haben wir gesehen, dass durch Proposition 3.5 und die Definition der *equity* und *utility* das Supremum der Nash-Gleichgewichte die soziale Wohlfahrt maximiert. Theorem 3.16 zeigt nun, dass jedes

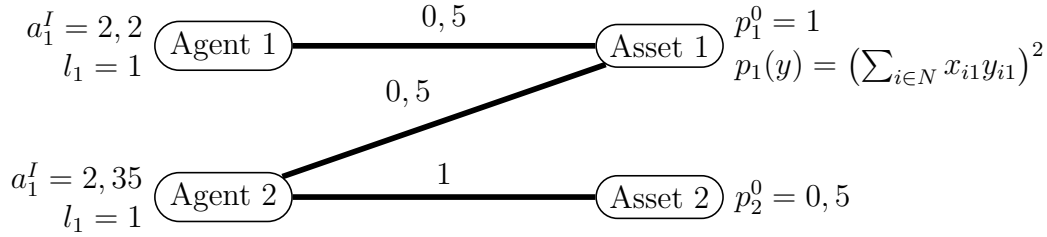


Abbildung 3.4: *Fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge*, in dem die soziale Wohlfahrt kein Gleichgewicht bildet (Theorem 3.18) mit $\alpha = 0, 5$ und $\lambda \approx 1, 48971$. Die Preisfunktionen sind dabei *konvex*, oder linear.

Pareto-Optimum ein starkes Gleichgewicht ist. Da jedes starke Gleichgewicht auch ein Nash-Gleichgewicht ist, können wir das folgende Korollar schlussfolgern.

Korollar 3.17. *Für fire sale Spiele mit fester Gruppenreihenfolge und $\alpha = 1$, ist das Supremum über alle Nash-Gleichgewichte ein starkes Gleichgewicht und repräsentiert ein Strategieprofil mit optimaler sozialer Wohlfahrt.*

Allerdings können wir für den Fall $\alpha \in (0, 1)$ ein gegenteiliges Beispiel finden.

Theorem 3.18. *Es existiert ein fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge, $\alpha \in (0, 1)$, konvexen Preisen und ohne ein starkes Gleichgewicht. Die soziale Wohlfahrt formt dabei kein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Wir betrachten ein Spiel mit zwei Spielern und zwei Assets, wobei die Preisfunktion des Ersten konvex mit $p_1^0 = 1$ und $p_1(y) = (\sum_{i \in N} x_{i1} y_{i1})^2$ ist und die des Zweiten linear mit $p_2^0 = 0, 5$. Agent 1 wird definiert durch $a_1^I = 2, 2$, $l_1 = 1$, $x_{11} = 0, 5$ und $x_{12} = 0$. Agent 2 durch $a_2^I = 2, 35$, $l_2 = 1$, $x_{21} = 0, 5$ und $x_{22} = 1$. Zusätzlich wird $\alpha = 0, 5$ und $\lambda \approx 1, 48971$ gewählt.

Die soziale Wohlfahrt ist maximal bei $y^{opt} = ((0, 25; 1), (1; 1))$ mit $SW(y^{opt}) \approx 3, 55$. Es ergeben sich *utilities* $u_1(y^{opt}) \approx 1, 51$ und $u_2(y^{opt}) \approx 2, 04$.

Agent 1 kann durch den *bank-run* Effekt seine *utility* auf $u_1(\vec{0}, y_2^{opt}) \approx 1, 51 > u_1(y^{opt})$ erhöhen, indem er $y_{11} = 0$ wählt. Jedoch wird dann Agent 2 durch die *leverage*-Bedingung seine Verkäufe auf $y_2 \approx (0, 883; 1)$ erhöhen müssen, um diese wieder zu erfüllen. Seine *utility* sinkt dabei auf $u_2(\vec{0}, y_2) \approx 1, 97$. Die *utility* von Agent 1 sinkt ebenfalls, auf $u_1(\vec{0}, y_2) \approx 1, 49$.

Das Gleichgewicht ist eindeutig. Agent 1 erfüllt seine *leverage*-Bedingung unter $y_2 = (1; 1)$ nur, wenn er mindestens nach der Strategie $y_{11} = 0, 25$ verkauft. Dort hat er aber den Anreiz den *bank-run* Effekt zu nutzen, also $y_{11} = 0$ zu wählen. Agent 2 muss dann reagieren und seine Verkäufe erhöhen. Er maximiert seine *utility* mit $y_2 \approx (0, 883; 1)$. Für ihn ist ein *bank-run* Effekt mit $y_2' = (0; 1)$, oder $y_2^0 = (0; 0)$ nicht

interessant, da seine *utility* somit auf $u_2(y'_2) = 0,5$, oder $u_2(y_2^0) = 0$. Ein anderes Gleichgewicht kommt aufgrund der *konvexen* Preisfunktion nicht in Frage.

Es wäre also für beide Agenten besser gewesen, bei den Strategieprofilen y^{opt} zu bleiben, auch wenn diese kein Gleichgewicht bilden. \square

Korollar 3.17 hat gezeigt, dass für *fire sale Spiele mit fester Gruppenreihenfolge* und $\alpha = 1$ ein starkes Gleichgewicht immer ein Strategieprofil mit optimaler sozialer Wohlfahrt repräsentiert. Das folgende Theorem erweitert diese Aussage noch und zeigt, dass dieses starke Gleichgewicht eindeutig ist, also kein anderes starkes Gleichgewicht existieren kann.

Theorem 3.19. *Für fire sale Spiele mit $\alpha = 1$ existiert ein eindeutiges starkes Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Das Supremum über alle Nash-Gleichgewichte y^{opt} , ein starkes Gleichgewicht in Bezug auf die soziale Wohlfahrt (Korollar 3.17).

Um einen Widerspruch zu zeigen, nehmen wir an, dass es ein anderes starkes Gleichgewicht $y \neq y^{opt}$ gibt, für das nach der Gitterstruktur aus Theorem 3.16 gilt, $y_i \leq y_i^{opt} \forall i \in N$. Wir suchen eine Koalition von Agenten $C = \{i \in N | y_i < y_i^{opt}\}$, welche unterschiedliche Strategien in y und y^{opt} spielen und somit einen Anreiz haben von y nach y^{opt} abzuweichen. Dabei interessiert uns nicht, in wie vielen Teilstrategien sich y_i und y_i^{opt} unterscheiden, da jede Abweichung diese Proposition ziegen würde.

Ab hier kann man dem Beweis von [Bertschinger et al., 2022, Theorem 5] folgen. Wir bezeichnen das resultierende Strategieprofil (y_C^{opt}, y_{-C}) und erkennen, dass für jedes Asset j mit $\sum_{i \in C} x_{ij} > 0$ und der zu j gehörigen Strategie y_{ik} , gilt

$$\sum_{i \in N} y_{ik} x_{ij} < \sum_{i \in C} y_i^{opt} x_{ij} + \sum_{i \notin C} y_i x_{ij}.$$

Somit ergeben sich die Preisfunktionen

$$p_j(y) = p_j \left(\sum_{i \in N} y_{ik} x_{ij} \right) < p_j \left(\sum_{i \in C} y_i^{opt} x_{ij} + \sum_{i \notin C} y_{ik} x_{ij} \right) = p_j(y_C^{opt}, y_{-C}).$$

Wir sehen, dass die Preise der Assets alle steigen. Durch die Definition der *utility* und *equity* erhalten wir das Ergebnis, dass jeder Agent in C davon profitiert, wenn er die Strategie y_i^{opt} und nicht y_i wählt. Das ist ein Widerspruch, da y nach unserer Definition ein starkes Gleichgewicht darstellt, die Koalition von Agenten aber einen Vorteil hat, wenn sie abweichen. y kann also kein starkes Gleichgewicht sein. y^{opt} muss ein eindeutiges starkes Gleichgewicht sein. \square

Obwohl für *fire sale Spiele mit fester Gruppenreihenfolge* und $\alpha = 1$ ein eindeutiges starkes Gleichgewicht existiert, können viele verschiedene Nash-Gleichgewichte existieren. Diese können im Vergleich beliebig schlecht werden. Im folgenden Beispiel

wird ein Spiel gezeigt, indem zwei Nash-Gleichgewichte existieren. Eines, in dem alle Spieler ihre Assets verkaufen und eines in dem alle Spieler alle Assets behalten.

Beispiel 3.20. *Wir betrachten ein Spiel mit n Agenten und 2 Assets, die jeweils eine Gruppe bilden.*

Sei $a_i^I > 0$ und $x_{ij} = \frac{1}{n}$ für alle Agenten $i \in N$ und Assets $j \in M$. Des Weiteren sei $p_j^0 = \frac{n}{2}$, $\alpha = 1$ und $l_i = a_i^I$ für alle i . λ wird so definiert, dass jeder Agent die leverage-Bedingung vor den Verkäufen genau erfüllt.

$$\text{lev}_i(y^1) = \frac{a_i^I + 2\frac{1}{n}\frac{n}{2}}{a_i^I - a_i^I + 2\frac{1}{n}\frac{n}{2}} = a_i^I + 1 =: \lambda$$

wobei $y^1 = ((1, 1), (1, 1), \dots, (1, 1))$ ist. Da jeder Agent die leverage-Bedingung erfüllt, ist keiner insolvent oder illiquid. Die Verkäufe sind bereits minimiert und die utility maximiert, also muss die Strategie y^1 optimal sein und führt zu einer sozialen Wohlfahrt von

$$\text{sw}(y^1) = n \cdot (a_i^I - l_i + x_{i1}p_1^0 + x_{i2}p_2^0) = n \cdot \left(a_i^I - a_i^I + \frac{1}{n}2\frac{n}{2} \right) = n.$$

Jetzt betrachten wir den Fall, dass alle Agenten ihre Verkäufe maximieren $y^0 = (0, 0, \dots, 0)$. Kein Agent i wird von einer Abweichung dieser Strategie profitieren können. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten. Fall 1, der Agent verkauft alle Anteile aus Asset-Gruppe 1 und hält (teilweise) Anteile aus Asset-Gruppe 2. Er spielt die Strategie $y_i = (0; l)$ mit $l \in (0, 1]$. Dann ist für ein ausreichend großes n

$$\begin{aligned} \text{lev}_i(y_i, y_{-i}^0) &= \frac{a_i^I + y_{i1}x_{i1}p_1(y_i, y_{-i}^0) + y_{i2}x_{i2}p_2(y_i, y_{-i}^0)}{a_i^I - l_i + x_{i1}p_1(y_i, y_{-i}^0) + x_{i2}p_2(y_i, y_{-i}^0)} = \frac{a_i^I + y_{i2}\frac{1}{n}\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{y_{i2}}{n}\right) + 0}{a_i^I - a_i^I + \frac{1}{n}\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{y_{i2}}{n}\right) + 0} \\ &= \frac{a_i^I + \frac{y_{i2}^2}{2n}}{\frac{1}{n}\frac{y_{i2}}{2}} = \frac{2n \cdot a_i^I}{y_{i2}} + y_{i2} > a_i^I + 1 = \lambda \quad \forall y_{i2} \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Für den Fall 2 behält der Agent Asset-Gruppe 2 komplett und einen Teil aus Asset-Gruppe 1, also $y_i = (l; 1)$ mit $l \in (0, 1]$. Dann erhalten wir mit der gleichen Technik für ein ausreichend großes n

$$\text{lev}_i(y_i, y_{-i}^0) = \frac{2n \cdot (a_i + 1)}{y_{i1}} + y_{i1} > a_i^I + 1 = \lambda \quad \forall y_{i1} \in (0, 1].$$

Da kein Agent i einen Nutzen hat, wenn er von y^0 abweicht, da sonst seine utility $-\infty$ wäre, bildet y^0 ein weiteres Nash-Gleichgewicht mit der sozialen Wohlfahrt

$$\text{sw}(y^1) = n \cdot (a_i^I - l_i + x_{i1}p_1(y^0) + x_{i2}p_2(y^0)) = n \cdot \left(a_i^I - a_i^I + \frac{1}{n}p_1^0 \cdot 0 + \frac{1}{n}p_2^0 \cdot 0 \right) = 0.$$

Die Nash-Gleichgewichte können also im Vergleich beliebig schlecht werden.

3.5 Beste-Antwort-Dynamik

Bisher haben wir nur Aussagen über die Existenz von Gleichgewichten und Optima getätigt. Nun wollen wir untersuchen, wie schnell ein solches Gleichgewicht erreicht werden kann, wenn alle Agenten zu ihrer Besten-Antwort abweichen. Wir fokussieren uns dabei auf den Fall $\alpha = 1$ und linearen price-impact und zeigen, dass es beliebig lange dauern kann, bis ein Gleichgewicht erreicht wird und wir ein approximatives Gleichgewicht nach pseudo-polynomieller Zeit erreichen.

Da es unendlich lange dauern kann, bis ein echtes Gleichgewicht gefunden wird, definieren wir hier ein approximatives Gleichgewicht. Das Theorem 3.11 hat gezeigt, dass durch iteratives Verbessern ein punktweise maximales Gleichgewicht gefunden wird, wenn in der Strategie y^1 gestartet wird. Nun definieren wir wie in [Bertschinger et al., 2022, Definition 1] ein Strategieprofil, welches nach einer bestimmten Anzahl von Schritten ein ϵ -approximatives Gleichgewicht erreicht. Durch die Kippunkte wie den *bank-run* Effekt, können die Strategieprofile eines ϵ -approximatives Gleichgewicht weit von einem tatsächlichen Gleichgewicht entfernt sein. Interessant für uns ist aber, dass wir dieses Gleichgewicht in pseudo-polynomial Zeit erreichen.

Definition 3.21. *Sei y das Strategieprofil für ein fire sale Spiel mit Gruppenreihenfolge und $\epsilon > 0$. Dann ist y ein ϵ -approximatives Gleichgewicht, wenn alle Agenten die folgenden Bedingungen erfüllt.*

1. *Wenn i liquide ist, dann gilt $e_i(y) \geq e_i(y'_i, y_{-i}) - \epsilon$ für jede Strategie y'_i , unter der i in (y'_i, y'_{-i}) liquide ist.*
2. *Wenn i liquide ist, dann gilt $\text{lev}_i(y) \leq \lambda + \epsilon$.*
3. *Wenn i insolvent oder illiquide ist, dann ist $y_i \leq (0, \dots, 0, \epsilon)$ also die Strategie, in der bis auf die letzte Asset-Gruppe alles verkauft wurde und von der letzten Gruppe nur noch der Anteil ϵ gehalten wird.*

Theorem 3.22. *Sei der price-impact linear und $\alpha = 1$. Wir definieren $\epsilon > 0$ und \mathbf{x} als numerische Darstellung des fire sale Spiels. Lass \mathbf{x}_{max} das Maximum aus allen Werten \mathbf{x} und \mathbf{x}^{-1} sein. Dann (1) erreicht Φ spätestens nach $|\mathcal{G}| \cdot |N|/\epsilon$ Schritten einen Punkt y^* , sodass $\|\Phi(y^*) - y^*\|_\infty \leq \epsilon$ gilt und (2) ist y^* ein $\text{poly}(x_{max} \cdot \epsilon)$ -approximierendes Gleichgewicht.*

Beweis. (1) Solange für eine Teilstrategie mit der Besten-Antwort-Funktion aus Proposition 3.7 für eine Teilstrategie $\|\Phi(y_{ik}^*) - y_{ik}\|_\infty > \epsilon$ gilt, gibt es ein y_{ik}^* , welches sich um mindestens ϵ in jedem Schritt verringert. Da y_{ik}^* nach unten durch 0 beschränkt ist, kann es für jede Asset-Gruppe maximal $|N|/\epsilon$ solcher Schritte geben. Es gibt genau $|\mathcal{G}|$ Asset-Gruppen und somit insgesamt maximal $|\mathcal{G}| \cdot |N|/\epsilon$ Schritte. \square

Beweis. (2) Sei der Agent i insolvent, oder illiquide, dann ist $\Phi_i(y) = \vec{0}$ und $\|\Phi_i(y_{ik}^*) - y_{ik}^*\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall k \in \mathcal{G}$. Da wir ein *fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge* betrachten, kann nur die Teilstrategie der letzten Asset-Gruppe > 0 sein, wenn alle anderen $y_{ik} \leq \epsilon$ sein müssen (wäre eine andere Teilstrategie $0 < y_{ik} \leq \epsilon$, müsste die darauf folgende Teilstrategie $y_{i(k+1)} = 1$ sein). Somit ist die 3. Bedingung aus definition 3.21 erfüllt.

Sei der Agent i liquide und $y' = \Phi(y^*)$, wobei für Spieler i mindestens eine Teilstrategie $y'_{ik} \in y'_i, < 1$ sein muss (ansonsten würde y^* bereits ein exaktes Gleichgewicht in i darstellen). Für die Wahl von y'_i , haben wir $\text{lev}_i(y'_i, y_{-i}^*) = \lambda$.

Wir betrachten die Strategien y'_i und y_i^* , wobei sich die Strategien y'_{ik} und y_{ik}^* für das jeweilige Asset in maximal ϵ unterscheiden. Beachte, dass dies durch die feste Gruppenreihenfolge maximal für zwei Assets der Fall sein kann. Somit können zwei Fälle eintreten.

Fall 1: y'_i und y_i^* unterscheiden sich für nur ein k .

Fall 2: y'_i und y_i^* unterscheiden sich in genau zwei Strategien y_{ik} und $y_{i(k-1)}$ (wobei für $0 < y_{i(k-1)} < \epsilon$ gilt) und Asset-Gruppe $k-1$ die vorherige in der Gruppenreihenfolge vor k ist.

Zuerst zeigen wir eine Schranke für die Differenz $\text{lev}_i(y_i^*, y_{-i}^*) - \text{lev}_i(y'_i, y_{-i}^*)$. Dazu betrachten wir die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d \text{lev}_i(y)}{d y_i} &= \sum_{j \in M} \frac{\partial \text{lev}_i}{\partial y_{ij}} d y_{ij} \\ &= \sum_{j \in M} \frac{\frac{\partial a_i}{\partial y_{ij}} \cdot e_i - \frac{\partial e_i}{\partial y_{ij}} \cdot a_i}{e_i^2} d y_{ij} \\ &= \frac{e_i \left(\sum_j \frac{\partial a_i}{\partial y_{ij}} d y_{ij} \right) - a_i \left(\sum_j \frac{\partial e_i}{\partial y_{ij}} d y_{ij} \right)}{e_i^2} := \frac{N(y)}{e_i^2(y)} \end{aligned}$$

Für Fall 1 steigt die *equity* in y_{ik} und es ergibt sich für jedes $y_i \in [y'_i, y_i^*] : e_i(y_i, y_{-i}^*) \geq e_i(y'_i, y_{-i}^*)$.

Für Fall 2 betrachten wir die zwei Phasen getrennt. Zuerst fixieren wir y_{ik} . Dann steigt die *equity* in $y_{i(k-1)}$ aufgrund der Monotonie der Preisfunktionen in Asset-Gruppe $k-1$. Als nächstes fixieren wir $y_{i(k-1)}$, dann steigt die *equity* in y_{ik} mit der gleichen Begründung. Da die *equity* in beiden Fällen steigt, können wir sagen, dass sie in y_i steigt und somit gilt für jedes $y_i \in [y'_i, y_i^*] : e_i(y_i, y_{-i}^*) \geq e_i(y'_i, y_{-i}^*)$.

Weiter können wir abschätzen, dass $e_i(y_i, y_{-i}^*) \geq e_i(y'_i, y_{-i}^*) = a_i(y'_i, y_{-i}^*)/\lambda \geq a_i^I/\lambda \geq x_{\max}^{-2}$, wobei die zweite Ungleichung gilt, da $\text{lev}_i(y'_i, y_{-i}^*) = \lambda$. Da die *equity* für den Fall $\alpha = 1$ nur von den Strategien in y durch die Preisfunktion abhängig ist (da verkaufte und nicht-verkaufte Assets gleich viel wert sind), handelt es sich um eine Funktion mit Polynom ersten Grades. Somit handelt es sich nach der Definition der *equity* auch bei $a_i(y)$ um eine Funktion mit Polynom ersten Grades. $N(y)$ ist

daher ein Polynom mit Grad zwei. Also können wir sagen, dass $N(y) \leq \text{poly}(x_{\max})$ und somit

$$\frac{d \text{lev}_i(y)}{dy_i} \leq \text{poly}(x_{\max}).$$

Durch Integration über y_i erhalten wir $\text{lev}_i(y^*) \leq \lambda + \text{poly}(x_{\max})$.

Es bleibt zu zeigen, dass kein liquider Agent seine *equity* mehr als $\text{poly}(x_{\max})$ pro Schritt verbessern kann. Dazu zeigen wir, mit der gleichen Technik wie oben, eine Schranke für die Differenz $e_i(y_i^*, y_{-i}^*) - e_i(y_i', y_{-i}^*)$ und erhalten $e_i(y_i^*) \geq e_i(y_i', y_{-i}^*) - \text{poly}(x_{\max}) \cdot \epsilon$. \square

Ein approximatives Gleichgewicht kann dabei beliebig weit von einem echten Gleichgewicht entfernt sein, da bereits kleine Änderungen der *leverage*-Bedingung zu einer beliebig großen Abnahme der *utility* führen können. Somit stellt sich die Frage, wie lange es dauert, bis ein tatsächliches Gleichgewicht gefunden werden kann. Dabei unterscheiden wir zwischen den Fällen $|N| = 1$ und $|N| > 1$.

Proposition 3.23. *Für ein Spiel mit linearem price-impact und $\alpha = 1$ und (i) nur einem Agenten, wird das Gleichgewicht spätestens nach einem Schritt gefunden. (ii) Für ein Spiel mit $|N| > 1$, kann es beliebig lange dauern, bis ein tatsächliches Gleichgewicht erreicht wird.*

Beweis. (i) Wenn der Agent insolvent oder illiquide ist, weicht er zu $y_i = \vec{0}$ ab und ist im Gleichgewicht.

Ansonsten wird der Agent genau so viel verkaufen, dass er die *leverage*-Bedingung erfüllt und findet somit nach einem Schritt ein Gleichgewicht. Da keine anderen Agenten existieren, kann er nicht in einen Zustand kommen, in dem er wieder handeln müsste.

(ii) Wir betrachten einen Fall, in dem mindestens zwei Agenten handeln müssen, also ihre *leverage*-Bedingung nicht erfüllen. Durch die Reaktion der anderen Agenten wird die *leverage*-Bedingung im nächsten Schritt gegebenenfalls auch nicht erfüllt und sie müssen wieder handeln. Dieser Vorgang kann sich unendlich oft mit beliebig kleinen Schritten wiederholen. Somit kann es unendlich lange dauern, bis ein tatsächliches Gleichgewicht gefunden wird. \square

Kapitel 4

Verkäufe mit fraktionaler Gruppenreihenfolge

4.1 Das Modell

Durch eine weitere Relaxierung der Bedingungen erhalten wir ein universelleres Modell. Wir betrachten *fire sale Spiele mit fester Gruppenreihenfolge* und relaxieren die Bedingung der Gruppenreihenfolge auf. Die neue Bedingung setzt voraus, dass von jeder Asset-Gruppe \mathcal{G}_k mindestens so viel gehalten werden muss, wie von der vorherigen Gruppe \mathcal{G}_{k-1} . Für alle gültigen Strategien gilt $y_{i1} \leq y_{i2} \leq \dots \leq y_{i|\mathcal{G}|}$. Wir nennen ein Spiel mit dieser neuen Beschränkung ein *fire sale Spiel mit fraktionaler Gruppenreihenfolge*. Durch die Auflockerung sind verschiedene neue Strategien möglich. Eine naheliegende Strategie wäre, alle Assets zu gleichen Teilen zu verkaufen, was einem *fire sale mit trivialer Gruppe* gleichkommt.

Beispiel 4.1. *Wir betrachten ein Spiel mit zwei Asset-Gruppen und jeweils einem Asset. Sei die Preisfunktion des Assets der ersten Gruppe konvex mit $p_1(y) = (\sum_{i \in N} x_{i1} y_{i1})^2 \cdot p_1^0$ und $p_1^0 = 10$. Die des Assets in der zweiten Gruppe linear mit $p_2^0 = 15$. Des Weiteren seien die Spielparameter $\alpha = 1$ und $\lambda = 1,78$. Die Spieler seien definiert durch $a_1^I = 10, l_1 = 10, a_2^I = 5, l_2 = 7,8$ und $x_{11} = 0,6, x_{12} = 0,4, x_{21} = 0,4, x_{22} = 0,6$. Begonnen in dem Startzustand $y^1 = ((1,1), (1,1))$ muss zuerst Agent 1 agieren, da dieser die leverage-Bedingung nicht erfüllt. Diese Aktion zwingt Agent 2 zum Handeln und er muss ebenfalls Anteile verkaufen. Zum Schluss haben beide Agenten alles verkauft.*

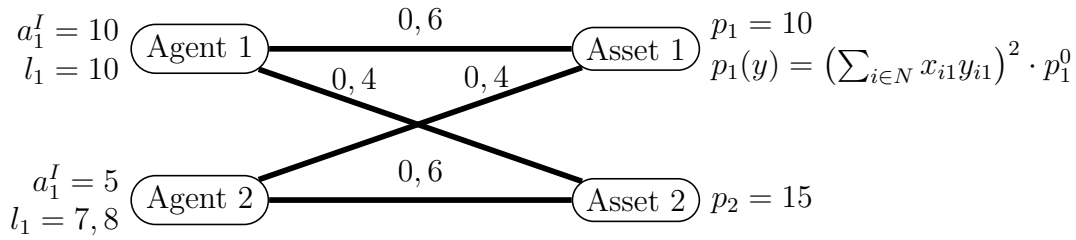


Abbildung 4.1: *Fire sale Spiel mit fraktionaler Gruppenreihenfolge.* (Beispiel 4.1) mit $\alpha = 1$, $\lambda = 1,78$ und einer linearen, sowie einer *konvexen* Preisfunktion.

Runde Spieler i	Strategien y_i				utility u_i		leverage lev_i	
	1		2		1	2	1	2
1	1	1	1	1	$-\infty$	10,2	1,83	1,76
2	0,77	0,77	1	1	9,91	$-\infty$	1,78	1,93
3	0,77	0,77	0,72	0,72	$-\infty$	8,34	2,05	1,87
4	0	0	0,72	0,72	$e_1(y)$	$-\infty$	3,34	5,66
5	0	0	0	0	$e_1(y)$	$e_2(y)$	<i>n.d.</i>	<i>n.d.</i>

Tabelle 4.1: Spielverlauf eines *fire sale Spiels mit fraktionaler Gruppenreihenfolge* (Beispiel 4.1). Wobei Agent 1 und 2 mit der Starteingabe y^1 am Ende *illiquid* sind. Die rote Markierung zeigt dabei, welcher *leverage* die *leverage*-Bedingung nicht erfüllt. Wenn ein Agent alles verkauft hat, erfüllt er diese.

Hier ist zu beachten, dass die Agenten nicht gezwungen werden, die beiden Gruppen zu gleichen Teilen zu verkaufen. Die Agenten würden am liebsten zuerst das Asset der zweiten Gruppe verkaufen. Nach der fraktionalen Gruppenreihenfolge dürfen sie das aber nicht. Daher müssen sie (vorher) genau so viel von Asset aus Gruppe 1 verkaufen, bis sie mit den gesamten Verkäufen die *leverage*-Bedingung erfüllen.

4.2 Standardeigenschaften des Modells

Bei der Untersuchung dieses Modells sehen wir, dass die Beste-Antwort-Dynamik in *fire sale Spielen mit fraktionaler Gruppenreihenfolge* eine grundlegend andere Struktur besitzt, welche nicht monoton ist. Daher können wir einen Großteil der späteren Aussagen, welche wir bei *fire sale Spielen mit fester Gruppenreihenfolge* getroffen haben, nicht für diesen Fall verallgemeinern.

Korollar 4.2. *Betrachte ein fire sale Spiel mit fraktionaler Verkaufsreihenfolge, dann ist die Funktion $\hat{lev}_i(y_i, y_{-i})$ monoton sinkend in y_{-i} .*

Beweis. In Proposition 3.2 haben wir gezeigt, dass für ein Spiel mit der Strategie y_i und $y_{-i} \leq y'_{-i}$ punktweise gilt, dass $\hat{\text{lev}}_i(y_i, y_{-i}) \geq \hat{\text{lev}}_i(y_i, y'_{-i})$. Für diesen Beweis wurde nicht verwendet, dass der Agent i eine strikte Verkaufsreihenfolge besitzt. Daher gilt es für beliebige Belegungen für y , solange $y_{-i} \leq y'_{-i}$. Somit gilt es auch für die fraktionale Verkaufsreihenfolge. \square

Wie in dem Kapitel der festen Gruppenreihenfolge betrachten wir auch die *leverage*-Funktion hinsichtlich ihrer Kontinuität.

Korollar 4.3. *Die leverage-Funktion lev_i ist unabhängig von der Verkaufsreihenfolge kontinuierlich, in den Strategieprofilen y , solange der Agent i solvent ist.*

Beweis. Die Kontinuität folgt direkt aus der Definition. Die Kontinuität der Preisfunktionen p_j impliziert die Kontinuität der Funktionen a_i und Δ_i und ist unabhängig von der Verkaufsreihenfolge, da für jede Belegungen von y ein gültiges a_i und Δ_i gefunden wird. Somit muss auch lev_i kontinuierlich sein, solange der Nenner nicht 0 ist (was immer der Fall ist, wenn i solvent ist). \square

Genauso können wir das Verhalten der *leverage*-Funktion beschreiben, wenn $e_i(y) \rightarrow 0$.

Korollar 4.4. *Sei i ein Agent und sei $(y^t)_t$ die Sequenz von Strategieprofilen, sodass $e_i(y^t) > 0 \forall t$ und $e_i(y^t) \rightarrow 0$. Dann ist $\text{lev}_i(y^t) \rightarrow \infty$. Es existiert also ein t für das gilt $\text{lev}_i(y^t) > \lambda$.*

Beweis. In Proposition 3.4 haben wir gezeigt, dass eine Reihe $(y^t)_t$ gefunden werden kann, welche $e_i(y^t) \rightarrow 0$ konvergieren lässt und die Eigenschaft $e_i(y^t) > 0$ besitzt. Dies können wir immenoch, da durch die Relaxierung der Gruppenreihenfolge immenoch die Strategieprofile einer festen Gruppenreihenfolge möglich sind. Somit können wir auch noch eine solche Reihe $(y^t)_t$ finden. \square

In Proposition 3.5 und Proposition 3.8 haben wir gezeigt, dass die Beste-Antwort-Funktion monoton in y_{-i} ist. Durch die Relaxierung der Gruppenreihenfolge können wir diese Beweise hier nicht erweitern. Stattdessen zeigt die nächste Proposition ein Beispiel, in dem die Beste-Antwort-Funktion für $\alpha = 1$ nicht monoton ist.

Proposition 4.5. *Es existiert ein fire sale Spiel mit fraktionaler Gruppenreihenfolge mit $\alpha = 1$ und linearem price-impact, in dem die Beste-Antwort-Funktion nicht monoton ist. Ein Agent i optimiert seine Strategie auf Grundlage der Strategien der anderen Spieler y_{-i} . Dazu zeigen wir ein y'_{-i} mit $y_{-i} \leq y'_{-i}$, sodass y_i die Beste-Antwort auf y_{-i} und y'_i die Beste-Antwort auf y'_{-i} ist und $y_i \not\leq y'_i$ gilt.*

Beweis. Wir betrachten ein *fire sale Spiel mit fraktionaler Gruppenreihenfolge* und 2 Asset-Gruppen, welche jeweils aus einem Asset bestehen. Sei $\lambda = 1.5$ und $p_1^0 = 110, p_2^0 = 100$. Agent 1 hat die Eingabewerte $a_1^I = 100, l_1 = 70$ und $x_{11} = 0,5, x_{12} = 0,5$. Die anderen Agenten halten den restlichen Teil der Assets, sodass $\sum_{i \neq 1} x_{i1} = 0,5$ und $\sum_{i \neq 1} x_{i2} = 0,5$.

Agent 1 maximiert nun unter $y_{-i}^1 = (1, \dots, 1)$ seine *utility*, indem er $y_{11} \approx 0,967469$ und $y_{12} \approx 0,967643$ wählt. Es ergibt sich die *utility* $u_1(y) \approx 133,291$. Nun nehmen wir an, dass die anderen Agenten ihre Verkäufe so verändern, dass weiterhin $y_{i2} = 1$ für alle $i \neq 1$ gilt, aber die neuen Strategien y_{i1} jetzt $\sum_{i \neq 1} y_{i1} x_{i1} = 0,4999$ ergeben. Agent 1 wird nun seine *utility* maximieren, indem er $y_{12} \approx 0,967514$ und $y_{11} \approx 0,967513 > 0,967469$ wählt. Die *utility* sinkt dadurch auf $u_1(y) \approx 133,289$. Agent 1 verkauft also weniger von Asset 1, obwohl alle anderen Agenten mehr verkaufen. Dafür erhöht Agent 1 seine Verkäufe von Asset 2. Somit ist die Beste-Antwort-Funktion nicht monoton unter y_{-i} . \square

4.3 Existenz von Gleichgewichten

Durch die Relaxierung der Gruppenreihenfolge können wir die Aussagen über die Existenz von Gleichgewichten nicht verallgemeinern. Wir können zeigen, dass es ein Spiel gibt, in dem das soziale Optimum kein Gleichgewicht bildet.

Proposition 4.6. *Es existiert ein fire sale Spiel mit fraktionaler Verkaufsreihenfolge, $\alpha = 1$ und linearem price-impact, in dem das soziale Optimum kein Gleichgewicht bildet.*

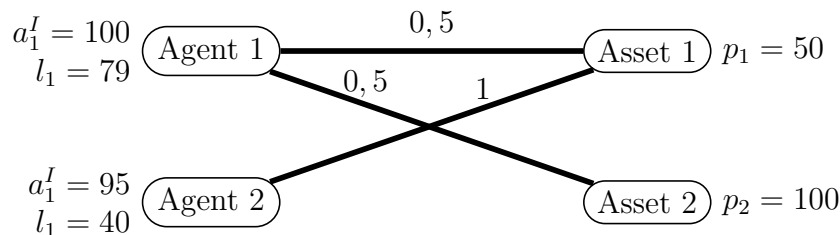


Abbildung 4.2: *Fire sale Spiel mit fraktionaler Gruppenreihenfolge*, in dem das soziale Optimum kein Gleichgewicht bildet (Proposition 4.6), mit $\alpha = 1, \lambda = 1,5$ und linearem price-impact für alle Assets.

Beweis. In [Bertschinger et al., 2022, Proposition 11] wurde bereits ein Beispiel für den Fall von non-even sales gefunden. Dieses erfüllt auch die Bedingungen der fraktionalen Gruppenreihenfolge.

Wir betrachten ein Spiel mit 2 Agenten und 2 Asset-Gruppen mit jeweils einem

Asset. Das Spiel hat die Beschränkung $\lambda = 1,5$, die Assets sind definiert durch $p_1^0 = 50, p_2^0 = 100$ und die Agenten durch $a_i^I = 100, l_1 = 79, x_{11} = 0,5, x_{12} = 1$ und $a_2^I = 95, l_2 = 40, x_{21} = 0,5$. Mit den Strategien $y_{11} \approx 0,8556, y_{12} = 0,9$ und $y_{21} \approx 0,9444$ wird die soziale Wohlfahrt auf $SW(y) = u_1(y) + u_2(y) = 133,5 + 77,5 = 211$ optimiert. Agent 1 kann jedoch seine *utility* auf $u_1(y) \approx 138$ erhöhen, indem er seine Verkäufe auf $\hat{y}_{11} \approx 0,5167$ und $\hat{y}_{12} \approx 0,9889$ setzt. Agent 2 muss als Reaktion seine Verkäufe auf $\hat{y}_{21} \approx 0,6212$ erhöhen. Somit ergibt sich die soziale Wohlfahrt $SW(\hat{y}) = 138 + 69 = 207 < 211$. Die Strategie des sozialen Optimums y formt daher kein Gleichgewicht. \square

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir das Modell der statischen *fire sale Spiele* um eine Verkaufsreihenfolge und eine Gruppenordnung erweitert. Genauer haben wir Verkäufe mit fester Gruppenreihenfolge und mit fraktionaler Gruppenreihenfolge betrachtet. Dabei haben wir gesehen, dass für den ersten Fall weiterhin die Menge der Nash-Gleichgewichte ein vollständiges Gitter formt und die Beste-Antwort-Dynamik zu einer schrittweisen Verbesserung führt, bis man zu einem punktweise maximalen Gleichgewicht gelangt ist. Des Weiteren wurde klar, dass jedes Pareto-Optimum ebenfalls ein starkes Gleichgewicht ist und für den Fall $\alpha = 1$ ein eindeutiges starkes Gleichgewicht existiert. Das Supremum aller Nash-Gleichgewichte formt in dem Fall $\alpha = 1$ ein soziales Optimum, in dem Fall $\alpha \in (0, 1)$ jedoch nicht unbedingt.

In dem Fall der fraktionalen Gruppenreihenfolge existiert keine monotone Beste-Antwort-Dynamik. Ebenso gibt es Spiele, in denen das soziale Optimum kein Gleichgewicht bildet.

5.2 Ausblick

In zukünftigen Arbeiten kann untersucht werden, wie sich die Beste-Antwort-Dynamik und die Zusammenstellung der Gleichgewichte verhält, wenn man die Verkaufsreihenfolge weiter relaxiert. Eine interessante Alternative wäre dabei, dass die Gruppen nicht mehr bei allen Agenten gleich sind, sondern jeder Agent seine eigenen Gruppen zusammenstellen darf. Dabei sollte ebenfalls untersucht werden, in wie weit sich diese Spielform von *fire sale Spielen ohne Gruppenreihenfolge* (non-even sales) unterscheidet. Durch eine weitere Relaxierung würde man das Modell weniger abstrakt gestalten und näher an einem tatsächlichen Markt orientieren.

Ein weiterer Diskussionspunkt könnte die Einführung von Transaktionskosten sein.

Beispielsweise, indem man mit jedem Verkauf von Assets die *liabilities* um einen bestimmten Wert erhöht. Somit könnten sich eventuell früher Gleichgewichte bilden und die Volatilität des Marktes gesenkt werden.

Abbildungsverzeichnis

3.1	<i>Fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge.</i> (Beispiel 3.1). Seien dabei $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1,4$ und die Preisfunktionen für ein Asset k <i>konvex</i> und alle anderen Assets linear.	8
3.2	<i>Fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge</i> und mehreren <i>bank-run</i> Effekten. (Beispiel 3.9). Seien dabei $\alpha = 0,2$, $\lambda \approx 1,425$, zwei Preisfunktionen <i>konvexen</i> und eine linearen.	16
3.3	<i>Fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge</i> , in dem die Agenten mit dem initialen Strategieprofil $y^0 = ((1, 1), (0, 0))$ bei gleichzeitigem Abweichen kein Gleichgewicht erreichen (Beispiel 3.13). Seien dabei $\alpha = 1$, $\lambda = 6$ und die Preisfunktionen linear.	18
3.4	<i>Fire sale Spiel mit fester Gruppenreihenfolge</i> , in dem die soziale Wohlfahrt kein Gleichgewicht bildet (Theorem 3.18) mit $\alpha = 0,5$ und $\lambda \approx 1,48971$. Die Preisfunktionen sind dabei <i>konvex</i> , oder linear.	22
4.1	<i>Fire sale Spiel mit fraktionaler Gruppenreihenfolge.</i> (Beispiel 4.1) mit $\alpha = 1$, $\lambda = 1,78$ und einer linearen, sowie einer <i>konvexen</i> Preisfunktion.	29
4.2	<i>Fire sale Spiel mit fraktionaler Gruppenreihenfolge</i> , in dem das soziale Optimum kein Gleichgewicht bildet (Proposition 4.6), mit $\alpha = 1$, $\lambda = 1,5$ und linearen price-impact für alle Assets.	31

Tabellenverzeichnis

3.1	Spielverlauf eines <i>fire sale Spiels mit fester Gruppenreihenfolge</i> (Beispiel 3.1). Wo bei ein Gleichgewicht entsteht, in dem Agent 1 insolvent ist. Die rote Markierung zeigt dabei, welche Agenten die <i>leverage</i> -Bedingung nicht erfüllen.	8
4.1	Spielverlauf eines <i>fire sale Spiels mit fraktionaler Gruppenreihenfolge</i> (Beispiel 4.1). Wobei Agent 1 und 2 mit der Starteingabe y^1 am Ende <i>illiquid</i> sind. Die rote Markierung zeigt dabei, welcher <i>leverage</i> die <i>leverage</i> -Bedingung nicht erfüllt. Wenn ein Agent alles verkauft hat, erfüllt er diese.	29

Literaturverzeichnis

- [Aymanns et al., 2016] Aymanns, C., Caccioli, F., Farmer, J., and Tan, V. W. (2016). Taming the basel leverage cycle. *Journal of Financial Stability*, 27(C):263–277.
- [Aymanns and Farmer., 2015] Aymanns, C. and Farmer., J. D. (2015). The dynamics of the leverage cycle. *Journal of Economic Dynamics and Control*.
- [Baes and Schaanning, 2020] Baes, M. and Schaanning, E. (2020). Reverse stress testing: Scenario design for macroprudential stress tests.
- [Bayer et al., 2010] Bayer, T., Mai, C., and Speicher-Utsch, S. (2010). 1000-punkterutsch: Das geheimnis des großen börsencrashes.
- [Bertschinger et al., 2022] Bertschinger, N., Hofer, M., Krogmann, S., Lenzner, P., Schuldenzucker, S., and Wilhelmi, L. (2022). Equilibria and convergence in fire sale games. *CoRR*, abs/2206.14429.
- [Bertschinger et al., 2020] Bertschinger, N., Hofer, M., and Schmand, D. (2020). Strategic Payments in Financial Networks. In Vidick, T., editor, *11th Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2020)*, volume 151 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 46:1–46:16, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.
- [Cont and Schaanning, 2014] Cont, R. and Schaanning, E. (2014). Fire sales, indirect contagion and systemic stress-testing. *SSRN Electronic Journal*.
- [Eisenberg and Noe, 2001] Eisenberg, L. and Noe, T. H. (2001). Systemic risk in financial systems. *Management Science*, 47(2):236–249.
- [Elliott et al., 2014] Elliott, M., Golub, B., and Jackson, M. O. (2014). Financial networks and contagion. *American Economic Review*, 104(10):3115–53.
- [Geanakoplos, 2009] Geanakoplos, J. (2009). The Leverage Cycle. Cowles Foundation Discussion Papers 1715, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.
- [Hemenway and Khanna, 2015] Hemenway, B. and Khanna, S. (2015). Sensitivity and computational complexity in financial networks.
- [Hendershott and Riordan, 2009] Hendershott, T. and Riordan, R. (2009). Algorithmic trading and information. Working Papers 09-08, NET Institute.

- [Hoefler and Wilhelmi, 2022] Hoefler, M. and Wilhelmi, L. (2022). Seniorities and minimal clearing in financial network games.
- [o.B.S. Basel Committee, 2011] o.B.S. Basel Committee (Jun 2011). Basel iii a global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. *BIS*.
- [Papp and Wattenhofer, 2021] Papp, P. A. and Wattenhofer, R. (2021). Debt swapping for risk mitigation in financial networks. In *Proceedings of the 22nd ACM Conference on Economics and Computation*. ACM.
- [Schuldenzucker et al., 2017] Schuldenzucker, S., Seuken, S., and Battiston, S. (2017). Default ambiguity: Credit default swaps create new systemic risks in financial networks. *SSRN Electronic Journal*.
- [Tarski, 1955] Tarski, A. (1955). A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5(2):285 – 309.
- [Treanor et al., 2016] Treanor, J., McCurry, J., and Davies, R. (2016). Bank of england investigating dramatic overnight fall in pound.